

A dodekaéder 12 lapja közül mindegyik pontosan 5 másikkal szomszédos. A lapokat A -tól L -ig megbetűzzük úgy, hogy a dodekaéder két lapja pontosan akkor legyen szomszédos, amikor az 1. ábrán a megfelelő betűvel jelölt tartományok szomszédosak (az 1. ábrát úgy kaphatjuk, hogy a dodekaédert egy, az A jelű lap „főlött” lévő pontból az L jelű lap síkjára vetítjük.)

Tegyük fel, hogy A piros. Ekkor B, C, D, E és F nem piros. Ha L piros, akkor G, H, I, J és K nem lehet piros, ha pedig L nem piros, akkor G, H, I, J és K közül legfeljebb kettő lehet piros. Azaz az A -val megegyező színű lapokból – A -t is beleszámítva – legfeljebb három van. A dodekaéder szimmetriái miatt ezt nyilván minden lapjáról elmondhatjuk. Vagyis mind a négy szín legfeljebb három lapon fordul elő; viszont összesen 12 lapunk van, ezért mind a négy színnel pontosan három lap van befestve.

Írjuk minden csúcshoz oda azt a három színt, amelyen színű lapok a csúcspan találkoznak. Mivel azonos színű lapoknak nincs közös csúcspan, és minden színű lapból három van, azért minden színt összesen $5 \cdot 3 = 15$ csúcspanhoz írtuk oda, és így $20 - 15 = 5$ csúcspanhoz nem írtunk színt. Kék és zöld lapot összekötő él nyilván minden olyan csúcspanból pontosan egy indul, ahol vagy a piros vagy a sárga szín nem szerepel. Ez összesen $2 \cdot 5 = 10$ csúcspan, de mivel minden élnek két vége van, azért összesen 5 olyan él van, amelyhez csatlakozó két lap közül az egyik kék, a másik pedig zöld.

Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A dodekaédert többféleképpen is kiszínezhethetjük a feltételeknek megfelelő módon – egy lehetséges színezés látható a hátsó borítón –, minden színezésre igaz lesz, hogy bármely két színhez pontosan 5 olyan él lesz a dodekaédernek, amelyhez az adott két színű lap csatlakozik.

