Legyenek $A_0, \ldots, A_k$ $2n$ elemű részei az $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ halmaznak. Mindegyik A_i-hez rendeljük hozzá azt az $\mathbf{a}_i$ vektort, amelynek j-edik koordinátája 0, ill. 1 attól függően, hogy $j \notin A_i$ vagy $j \in A_i$. Nyilván $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = |A_i \cap A_j|$, így például $\mathbf{a}_i^2 = 2n$. Tegyük fel, hogy a feladat állítása hamis, azaz $\forall\, i \neq j$ esetén $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j < \left(1 - \frac{1}{k}\right) n$. Ekkor

$$\mathbf{b}^2 = (\mathbf{a}_0 + \cdots + \mathbf{a}_k)^2 = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{a}_i^2 + \sum_{i<j} 2\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j < (k+1) \cdot 2n + 2\binom{k}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) n \leq n(k+1)^2.$$

Viszont $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{4n})$ koordinátáinak összege egyenlő $\sum |A_i| = (k+1) \cdot 2n$-nel, így

$$\mathbf{b}^2 = b_1^2 + \cdots + b_{4n}^2 \geq \frac{1}{4n}(b_1 + \cdots + b_{4n})^2 = n(k+1)^2,$$

a számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség szerint. Ezt összevetve az utóbbival, ellentmondást kapunk, ami bizonyítja a feladat állítását.

Lukács László (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.) *Lippner Gábor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)