

Jelölje  $f_i$  a Fibonacci-sorozat  $i$ -edik elemét, azaz  $f_0 = f_1 = 1$ ,  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ .

A Fibonacci-sorozat értelemszerűen kiterjeszthető negatív indexekre is ( $f_{-1} = 0$ ,  $f_{-2} = 1$ ,  $f_{-3} = -1$  stb).

Bebizonyítjuk a következőt:  $(f_n)$   $m$  szerint vett maradékai periodikusak (minden  $m > 1$ -re).

Tekintsük ugyanis az  $(f_i, f_{i+1})$  ( $i \in \mathbf{Z}$ ) rendezett párokat modulo  $m$ . Közülük véges sok, legfeljebb  $m^2$  különböző lehetséges, így létezik olyan  $i < j$ , amelyre  $f_i \equiv f_j$  és  $f_{i+1} \equiv f_{j+1} \pmod{m}$ . Innen nyilván  $f_{i-1} \equiv f_{j-1}$  és  $f_{i+2} \equiv f_{j+2}$  adódik a rekurzióból, ezért teljes indukcióval azt kapjuk, hogy  $(f_n)$  az  $m$  szerint vett maradékra nézve periodikus (mindkét irányban!) a  $j - i$  periódussal.

Ekkor végtelen sok pozitív  $j$  van, amelyre  $-1 = f_{-3} \equiv f_j \pmod{1\,000\,000}$ , és  $j > 0$  esetén  $f_j > 0$ ; vagyis  $f_j$  a 10-es számrendszerben felírva 6 darab 9-esre végződik.