

Legyen $B_{i-1}A_iP \sphericalangle = \alpha_{2i-1}$ és $PA_iB_i \sphericalangle = \alpha_{2i}$ (l. az *ábrát*; az indexeket most is és a továbbiakban is modulo 3 értjük). A $PB_iA_iB_{i-1}$ négyszög húrnégyszög, mert $PB_{i-1}A_i \sphericalangle = PB_iA_i \sphericalangle = 90^\circ$. Ezért a kerületi szögek tétele szerint:

$$(1) \quad PB_iB_{i-1} \sphericalangle = PA_iB_{i-1} \sphericalangle = \alpha_{2i-1} \quad \text{és} \quad PB_{i-1}B_i \sphericalangle = PA_iB_i \sphericalangle = \alpha_{2i}.$$

(Az *ábrán* B_i az A_iA_{i-1} szakasz belső pontja, könnyen látható azonban, hogy az (1) összefüggések akkor is igazak, ha B_{i-1} és B_i közül az egyik nem belső pontja az $A_{i-1}A_i$, illetve az A_iA_{i+1} szakaszoknak. B_{i-1} és B_i viszont egyszerre nem lehetnek az említett szakaszokon kívül, mert akkor P nem lenne belső pontja az $A_1A_2A_3$ háromszögnek.) A $B_1B_2B_3$ háromszög szögei az (1) összefüggések alapján tehát

$$B_3B_1B_2 \sphericalangle = PB_1B_3 \sphericalangle + PB_1B_2 \sphericalangle = \alpha_1 + \alpha_4, \quad B_1B_2B_3 \sphericalangle = PB_2B_1 \sphericalangle + PB_2B_3 \sphericalangle = \alpha_3 + \alpha_6, \quad B_2B_3B_1 \sphericalangle = PB_3B_2 \sphericalangle + PB_3B_1 \sphericalangle = \alpha_5 + \alpha_2.$$

Ezután a $B_1B_2B_3$ háromszögből kiindulva ugyanúgy kapjuk a $C_1C_2C_3$ háromszög szögeit:

$$C_3C_1C_2 \sphericalangle = \alpha_1 + \alpha_6, \quad C_1C_2C_3 \sphericalangle = \alpha_3 + \alpha_2 \quad \text{és} \quad C_2C_3C_1 \sphericalangle = \alpha_5 + \alpha_4;$$

majd pedig a $C_1C_2C_3$ háromszögre alkalmazva az eljárást, a $D_1D_2D_3$ háromszög szögeit:

$$D_3D_1D_2 \sphericalangle = \alpha_1 + \alpha_2, \quad D_1D_2D_3 \sphericalangle = \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{és} \quad D_2D_3D_1 \sphericalangle = \alpha_5 + \alpha_6.$$

Tehát a $D_1D_2D_3$ háromszög szögei megegyeznek az $A_1A_2A_3$ háromszög szögeivel, vagyis a két háromszög hasonló.

Megjegyzés. Az állítás megfelelője tetszőleges konvex n -szögre is igaz, akkor n lépés után kapunk az eredetihez hasonló n -szöget. A szögek egyenlőségét ebben az esetben is a megoldásban leírt módon láthatjuk be, a sokszögek hasonlósága azonban nem következik a szögek egyenlőségéből, ehhez még azt is meg kell mutatnunk, hogy P -nek a két sokszög megfelelő oldalegyeneseitől való távolságának aránya állandó.

Végh A. László (Debrecen, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

