I. megoldás. Jelöljük az AEF háromszög köré írható kör középpontját O-val, az E pont O-ra vonatkozó tükörképét pedig D-vel (*1. ábra*). Ekkor Thalész tétele miatt $EFD\sphericalangle = 90°$, vagyis a B pont FD egyenesre vonatkozó tükörképe C, tehát $CD = DB$. Felhasználva a kerületi szögek tételét és azt, hogy AE szögfelező a CAB háromszögben, kapjuk, hogy

$$C_1DE\sphericalangle = C_1AE\sphericalangle = EAB_1\sphericalangle = EDB_1\sphericalangle. \tag{1}$$

Mivel ED átmérője a körnek, azért $C_1D = B_1D$.

Forgassuk el az AC egyenest D körül $CAB\sphericalangle$-gel. Az (1) szögegyenlőségekből következik, hogy $C_1DB_1\sphericalangle = CAB\sphericalangle$, s így $C_1D = B_1D$ miatt C_1 képe a forgatásnál B_1 lesz, az AC egyenes képe pedig az AB egyenes. Mivel $CD = BD$ és az $ABD\sphericalangle$ is, valamint az $ACD\sphericalangle$ is hegyesszög, azért C képe a forgatásnál csak B lehet. Ez viszont azt jelenti, hogy a forgatásnál a C_1C szakasz képe B_1B, tehát felhasználva, hogy a forgatás egybevágósági transzformáció, kapjuk, hogy $BB_1 = CC_1$.

Pap Júlia (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás.

Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, az AEF háromszög köré írt kört pedig k-val. F a BC oldal felezőpontja, ezért

$$CF = BF = \frac{a}{2}.$$

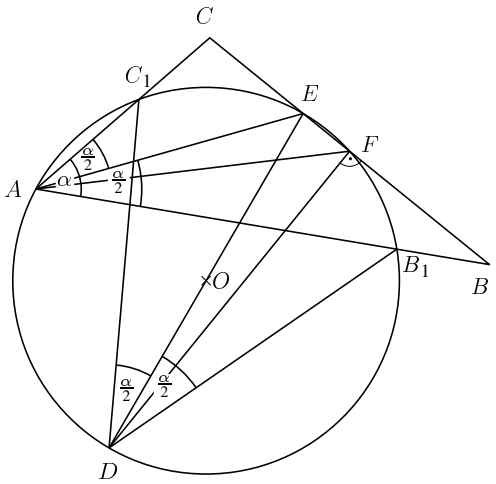
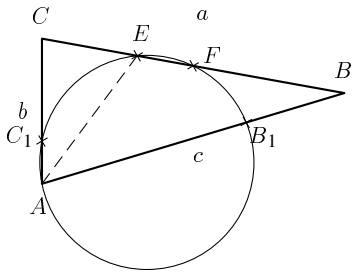
A szögfelezőtétel szerint $\dfrac{CE}{EB} = \dfrac{b}{c}$, továbbá $CE + EB = a$. Így

$$CE = \frac{b \cdot a}{b+c} \qquad \text{és} \qquad BE = \frac{c \cdot a}{b+c}.$$

A C pont k-ra vonatkozó hatványát kétféleképpen felírva:

$$CC_1 \cdot CA = CE \cdot CF, \qquad \text{amiből} \qquad CC_1 = \frac{CE \cdot CF}{CA} = \frac{\frac{b \cdot a}{b+c} \cdot \frac{a}{2}}{b} = \frac{a^2}{2(b+c)}.$$

A B pont k-ra vonatkozó hatványát hasonlóan felírva:

$$BB_1 \cdot BA = BF \cdot BE, \qquad \text{amiből} \qquad BB_1 = \frac{BF \cdot BE}{BA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{c \cdot a}{b+c}}{c} = \frac{a^2}{2(b+c)}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $BB_1 = CC_1 = \dfrac{a^2}{2(b+c)}$.