I. megoldás. Az *ábrán* O a körülírt és a beírt gömb közös középpontja, R, illetve r a sugarak, és $AB=1$. Az E csúcs alapsíkra való vetülete T, F a BC felezőpontja, U a beírt gömbnek az ABC oldalon vett érintési pontja. Az OTF és OUF derékszögű háromszögek egybevágók, mert megegyeznek két oldalban és a nagyobbal szemközti szögben. Ezért $FU=FT=\frac{1}{2}$. Ugyanígy egybevágóak az OUE és OTB háromszögek, amiért $EU=BT=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezért $EF=EU+FU=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Az oldalélek szögének a felére: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1$, amiből táblázattal vagy zsebszámológéppel $\frac{\alpha}{2}=22{,}5^\circ$ és így $\alpha=45^\circ$. Arra gondolhatunk azonban, hogy a kapott érték nem pontos. Számítsuk ki a pontos α érték megkeresése érdekében a gúla oldalélét:

$$BE=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

Ezután az EBC háromszögből a koszinusztétel szerint:

$$\cos\alpha=\frac{2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1}{2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből $\alpha=45^\circ$.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn. 10.o.t.)

II. megoldás. Papp Dávid két megoldást is adott erre a feladatra. Az ábra alapján könnyen követhető számításait vázlatosan közöljük. A párhuzamos szelők tétele szerint $TV=\frac{r(R+r)}{R}$. A Pitagorasz-tétel alapján: $EF=\sqrt{(R+r)^2+\frac{1}{4}}$. Fejezzük ki ezután kétféleképpen az ETF háromszög kétszeres területének négyzetét:

$$\frac{r^2(R+r)^2}{R^2}\cdot\left[(R+r)^2+\frac{1}{4}\right]=\frac{(R+r)^2}{4}. \tag{1}$$

A BOT háromszögből:

$$R^2=r^2+\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszerből $r=\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$, amivel

$$BE=\sqrt{(R+r)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{r^2+\frac{1}{2}}+r\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

Végül ugyanúgy, mint az első megoldásban, $\alpha=45^\circ$.