

Használjuk az *ábra* jelöléseit; az ábrán f jelöli a kérdéses szögfelező hosszát. A B ponton át f -fel húzott párhuzamos az AC egyenest messe D -ben. Legyen a BD szakasz felezőpontja E . Az $\frac{\alpha}{2}$ -vel jelölt szögek egyenlősége révén $AB = c$, és így

$$(1) \quad BD = 2 \cdot BE = 2c \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

A párhuzamos szelők tétele szerint $\frac{f}{BD} = \frac{b}{b+c}$, amiből (1) felhasználásával

$$(2) \quad f = 2 \frac{b \cdot c}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ezután a feladatot úgy próbáljuk megoldani, hogy meghatározzuk $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ -t, abból pedig $\cos \frac{\alpha}{2}$ értékét. Ismeretes, hogy a beírt körhöz az A csúcsból húzott érintőszakasz hossza $s - a$, ezért $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$. Felhasználjuk még, hogy a háromszög területe $t = r \cdot s$, továbbá a Héron-képletet. Ekkor

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r \cdot s}{s(s-a)} = \frac{t}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

A feladat feltétele szerint

$$t = (a-b+c)(a+b-c) = 4(s-b)(s-c),$$

és így

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r \cdot s}{s(s-a)} = \frac{4 \cdot (s-b)(s-c)}{s(s-a)},$$

amiből $\frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$. Ezt (3)-ba behelyettesítve:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{amiből} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}.$$

A $|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$ összefüggés alapján $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$, és ezzel (2)-ből $f = \frac{8}{\sqrt{17}} \frac{b \cdot c}{b+c}$, amint az bizonyítandó volt.

