

Először lássuk be, hogy p komplex gyökei 1999-nél kisebb abszolút értékűek. Tegyük fel, hogy ezzel ellentétben $|x| \geq 1999$, $x \in \mathbf{C}$ -re

$$p(x) = a_n x^2 + \dots + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0).$$

Ekkor a feladat feltételeit kihasználva:

$$\begin{aligned} |x^n| &\leq |a_n x^n| = |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| \leq \\ &\leq |a_{n-1} x^{n-1}| + \dots + |a_0| \leq 1998 \cdot (|x|^{n-1} + \dots + 1) = \\ &1998 \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} \leq 1998 \cdot \frac{|x|^n - 1}{1999 - 1} = |x|^n - 1. \end{aligned}$$

Ez ellentmondás, tehát $p(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n)$, ahol $|x_i| < 1999$.

Tegyük fel, hogy a feladat állítása hamis, azaz $p = 9 \cdot h$, ahol g és h egész együtthatós polinomok. Így $p(2000) = g(2000) \cdot h(2000)$ prím, azaz valamelyik tényező 1 abszolút értékű. Legyen például $|g(2000)| = 1$. Nyilván

$$g(x) = b \cdot (x - x_{i_1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{i_k})$$

(ahol $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ és $b \neq 0$ egész), hiszen $g \mid p$. Ezért

$$1 = |g(2000)| = |b| \cdot |2000 - x_{i_1}| \cdot \dots \cdot |2000 - x_{i_k}|.$$

Ez viszont ellentmondás, mert a jobb oldali szorzat 1-nél nagyobb abszolút értékű $|x_i| < 1999$ miatt.

Megjegyzés. Az állítás és a bizonyítás is helyes marad, ha 2000 helyére nagyobb egészt írunk.