

Mivel m egész szám, azért $2m - 3 \neq 0$. $n - 1$ sem lehet 0, hiszen egyébként az egyenletből $-1 = 0$ következne, ami lehetetlen. Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 1-et, és osszuk el mindkét oldalt a $(2m - 3)(n - 1) \neq 0$ -val.

$$x^2 + (m - n - 4)x - 2(m - n - 2) = \frac{1}{(2m - 3)(n - 1)}.$$

Ha x_1 és x_2 a fenti egyenlet gyökei, akkor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -(m - n - 4) \quad \text{és} \\ x_1 x_2 &= - \left[2(m - n - 2) + \frac{1}{(2m - 3)(n - 1)} \right]. \end{aligned}$$

Mivel m és n egészek, $x_1 + x_2$ is egész. Ha a gyökök szorzata egész, akkor $\frac{1}{(2m - 3)(n - 1)}$ is egész. Ez akkor teljesül,

ha a nevező $+1$ vagy -1 . Vizsgáljuk meg a két esetet:

(A) Ha a nevező 1 , akkor $2m - 3 = 1$ és $n - 1 = 1$, vagy $2m - 3 = -1$ és $n - 1 = -1$.

Az első esetben $m = 2$ és $n = 2$, a második esetben $m = 1$ és $n = 0$.

Nézzük meg, hogy m és n kapott értékei mellett mik az egyenlet gyökei.

Ha $m = 2$ és $n = 2$, akkor az (1) egyenlet $x^2 - 4x + 3 = 0$, ahonnan $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. A gyökök most egész számok.

Ha $m = 1$ és $n = 0$, akkor az (1) egyenlet $x^2 - 3x + 1 = 0$ és $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ezek pedig nem egész számok.

(B) Ha a nevező -1 , akkor $2m - 3 = 1$ és $n - 1 = -1$, vagy pedig $2m - 3 = -1$ és $n - 1 = 1$. Az első esetben $m = 2$, $n = 0$, a második esetben $m = 1$ és $n = 2$.

Az $m = 2$ és $n = 0$ esetben a kapott egyenlet gyökei egész számok lesznek ($x^2 - 2x + 1 = 0$; $x_{1,2} = 1$), a második esetben viszont az egyenletnek nincs valós gyöke.

Az (1) egyenletnek tehát csak az $m = 2$, $n = 2$ és az $m = 2$, $n = 0$ esetekben lesznek egész gyökei.

Horváth László (Csurgó, Nagyváthy Középisk., 10. o.t.)