A feltétel azt jelenti, hogy $n!$ 10-nek pontosan a 100-adik hatványával legyen osztható. Mivel 10-nek a prímtényezős felbontása $2 \cdot 5$, ezért ez pontosan akkor teljesül, ha $n!$ prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 egyike pontosan a 100-adik, a másikuk pedig legalább a 100-adik hatványon szerepel. Várható, hogy 5 szerepel kisebb kitevőn, ezért először azt nézzük meg, hogy mikor lesz 5-nek a kitevője 100.

Mivel minden ötödik természetes szám osztható 5-tel, ezért az n-ig fellépő számok szorzata csak úgy lehet pontosan 5^{100}-nal osztható, ha n-ig legfeljebb 100 darab 5-tel osztható szám van, azaz, ha $n \leq 500$.

Írjuk fel most n-et „ötös számrendszerben", azaz $n = a + 5b + 25c + 125d + 625e + \ldots$ alakban, ahol a szereplő „együtthatók" nemnegatív 5-nél kisebb egész számok (ilyen felírás a maradékos osztás alapján minden pozitív n-re létezik). Mivel $n \leq 500$, ezért ebben a felírásban csak az első négy tag lehet 0-tól különböző: $n = a + 5b + 25c + 125d$.

Nézzük meg, n-ig hány szám osztható 5-tel, 25-tel és 125-tel. 5-tel minden ötödik, 25-tel minden huszonötödik és 125-tel minden százhuszonötödik. Ezek száma tehát rendre $b + 5c + 25d$, $c + 5d$ és d.

A szorzatban tehát $(b + 5c + 25d)$-szer lép fel tényezőként az 5, $(c + 5d)$-szer egy újabb 5-ös faktor és d-szer még egy 5-ös faktor. Így a fellépő 5-ös faktorok számára:

$$(b + 5c + 25d) + (c + 5d) + d = b + 6c + 31d = 100$$

teljesül.

$d > 3$ lehetetlen, mert $31 \cdot 4 > 100$. Mivel b, $c < 5$, azért $d < 3$ sem lehet, mert $4 + 24 + 62 = 90 < 100$. A $d = 3$ esetben azt kapjuk, hogy $b + 6c = 100 - 93 = 7$; aminek nyilvánvalóan egyetlen megoldása $b = c = 1$. Ebből $n = a + 5 + 25 + 375 = 405 + a$.

Eszerint a szóbajövő számok $n = 405, 406, 407, 408, 409$.

Mivel 405-ig több, mint 200 páros szám van, ezért ezek mindegyikére az $n!$ osztható 2^{100}-nal is. Ezek tehát valóban megfelelnek a feladat követelményeinek. Ha viszont $n > 409$, akkor még egy 5-ös tényező lép fel; más megoldás tehát nincs.

Megjegyzés. A fenti eljárás 100 helyett bármely k természetes számra elvégezhető. Nem mindig kapunk azonban igenlő választ.

Végződhet-e például $n!$ 5 darab 0-ra? Itt csak $n = a + 5b$ lehetséges. Ekkor a szereplő 0-k számára $(a + 5b) + b = a + 6b = 5$ adódik. Ez csak úgy lehetne, ha $b = 0$ volna, amiből $a = 5$ következik; ellentmondva az $a \leq 4$ feltételnek. Hasonlóképpen lehetetlen $5 + 6b$ számú 0, ahol $0 \leq b < 5$. Eszerint 11, 17, 23 és 29 darab 0 sem állhat $n!$ végén.

Nagyobb n esetén is hasonlóképpen okoskodhatunk; itt azonban még figyelmesebben kell eljárnunk. Ha $n = a + 5b + 25c$ alakú, akkor az $n!$ „végén" szereplő 0-k száma $k = a + 6b + 31c$ (itt feltehető, hogy $c > 0$). A $k = 36$ esetben például csak $c = 1$ lehet. Ebből az $a + 6b = 5$ egyenlőség következne, ami | mint már láttuk | lehetetlen. De lehetetlen a $k = 31 + 30$ eset is. Ez csak úgy lehetne, ha $c = 1$ teljesülne. Az ebből következő $a + 6b = 30$ egyenlőség csak úgy állhatna fenn, ha $b = 5$ volna; ami a $b \leq 4$ feltételnek mond ellent. A $31 \leq k < 62$ esetben csak $c = 1$ lehet, amiből $0 \leq a + 6b < 31$ adódik. A $0 \leq a$, $b \leq 4$ feltétel miatt itt ki kell zárni az $5 + 6b$, valamint az $a + 30$ alakú számokat. Ezekre:

$$k = 5 + 31;\ 5 + 6 + 31;\ 5 + 12 + 31;\ 5 + 18 + 31;\ 5 + 24 + 31;\ 30 + 31.$$

(A következő kiírandó szám már nem felel meg a $k < 62$ feltételnek.) Ezek szerint $n!$ nem végződhet 36, 42, 48, 54, 60, 61 számú 0-ra sem.

Ugyanígy lehetetlen a

$$k = 5 + 31c;\ 5 + 6 + 31c;\ 5 + 12 + 31c;\ 5 + 18 + 31c;\ 5 + 24 + 31c;\ 30 + 31c$$

számú 0 végződés is $(1 < c < 5)$.

Az $n \geq 625$ esetben még bonyolultabb a kizárandó eseteket megkeresni; bár az eredmény megfogalmazható.