Két esetet különböztetünk meg:

a) ha n páros,

b) ha n páratlan.

a) Írjuk fel az egész számokat növekvő sorrendben, majd írjuk alá fordított sorrendben, és képezzük az egymás alá írt számok különbségét:

növekvő sorrend	1	2	3	...	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+1$	...	$n-1$	n
fordított sorrend	n	n-1		...	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}$	...	2	1
különbség	$1-n$	$3-n$	$5-n$		1	1		$n-3$	$n-1$

A különbségek $\frac{n}{2}$-ig negatívak, de abszolút értékben megegyeznek az $\frac{n}{2}+1$-től n-ig vett különbségekkel, ezért elegendő $\frac{n}{2}$-ig összegezni, és ennek kétszeresét venni. A különbségek számtani sorozatot alkotnak, amelyben $a_1 = |1-n| = n-1$, $d=-2$, a tagok száma: $\frac{n}{2}$ és $a_1 = 1$. A sorozat összege az ismert képlet szerint így írható fel:

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}(n-1+1) = \frac{n^2}{4}.$$

A keresett összeg pedig: $\frac{n^2}{2}$.

b) Ha n páratlan, az előzőkhöz hasonlóan

növekvő sorrend	1	2	3	...	$k-1$	k	$k+1$	...	$n-1$	n
fordított sorrend	n	n-1		...	$k+1$	k	$k-1$	...	2	1
különbség	$1-n$	$3-n$	$5-n$		-2	0	2		$n-3$	$n-1$

Most a számtani sorozatban a tagok száma változott, mégpedig $k=\frac{n+1}{2}$-re, és az utolsó tag $a_n = 0$.

Az összeg: $S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}(n-1) = \frac{n^2-1}{4}$. A különbségek összege: $\frac{n^2-1}{2}$.

Markó József (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. o.t.)