I. megoldás.

$$1997=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\underbrace{1+1+\dots+1}_{1995\ \text{db}},$$

így a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1997}{1999}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+\dots+1}{1999}\ge\sqrt[1999]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}=\sqrt[1999]{\frac{1}{16}}.$$

Ebből

$$\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}\ge\frac{1}{16},$$

azaz

$$1997^{1999}\ge1999^{1999}\cdot\frac{1}{16}\ge1999^{1997}\cdot\frac{1999^2}{16}.$$

Mivel $\dfrac{1999^2}{16}>1$, így $1997^{1999}>1999^{1997}$.

Tarcsi Károly (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy $(n+2)^n<n^{n+2}$ minden $n\ge3$ természetes számra. Ehhez elég az ezzel ekvivalens $\sqrt[n+2]{n+2}<\sqrt[n]{n}$ egyenlőtlenséget belátni, azaz elég megmutatni, hogy az $\{\sqrt[n]{n}\}$ sorozat $n=3$-tól kezdve szigorúan monoton fogyó. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$, vagyis

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n. \tag{1}$$

Teljes indukcióval bizonyítunk: $n=3$-ra (1) valóban teljesül, mert $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}<3$. Legyen most $n\ge3$, és tegyük fel, hogy (1) fennáll. Bebizonyítjuk, hogy ekkor teljesül $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}<n+1$ is. Valóban,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)<\\&<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{n(n+2)}{n+1}<n+1.\end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük, tehát valóban igaz, hogy $(n+2)^n<n^{n+2}$, és így $1999^{1997}<1997^{1999}$.

Kovács Erika Renáta (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 8. o.t.)

III. megoldás. Számoljuk ki, hogy melyik szám hány számjegyből áll. Tetszőleges pozitív egész x szám $[\lg x+1]$ jegyű.

$$\begin{aligned}\left[\lg 1997^{1999}+1\right]&=[1999\cdot\lg1997+1]=6598\\\left[\lg 1999^{1997}+1\right]&=[1997\cdot\lg1999+1]=6592.\end{aligned}$$

Tehát 1997^{1999} több jegyű, mint 1999^{1997}, így biztosan nagyobb nála.

Máthé András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., 10. o.t.)