$$(1)\qquad \left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Tudjuk, hogy

$$(2)\qquad \frac{1}{\sin\alpha}>1 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{\cos\alpha}>1,$$

mivel a feltétel szerint $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

Mivel α hegyesszög, létezik olyan ABC derékszögű háromszög, amelynek egyik hegyesszöge α, átfogója, AB, legyen egységnyi. Ekkor $AC=\sin\alpha$ és az ABC és ACD háromszögek hasonlóságából $DCB\sphericalangle=\alpha$ és $CD=\sin\alpha\cos\alpha$. Tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó magasság legfeljebb akkora lehet, mint a Thálesz-kör sugara, azaz $\frac{1}{2}$. Innen $\sin\alpha\cos\alpha\le\frac{1}{2}$, azaz $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\ge 2$.

Ebből és (2)-ből következik a feladat állítása.

Szűcs Zsófia (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. évf.)