

A feladat állítását hurokél és többszörös él nélküli gráfokra, ún. egyszerű gráfokra bizonyítjuk. (Hurokél minden színezésnél egyszínű körhöz vezetne, és egy négy éllel összekötött pontpár esetén már szintén keletkeznék kör.)

Szükségünk lesz a síkra rajzolható gráfok két ismert tulajdonságára (ezek bizonyításával kapcsolatban lásd megjegyzéseinket):

- 1) Síkra rajzolható gráfban nem lehet teljes ötszög, azaz öt olyan pont, amelyek közül bármely kettőt él köt össze.
- 2) Tetszőleges síkra rajzolható gráf tartalmaz legfeljebb 5-ödfokú pontot, azaz olyan pontot, amelyből legfeljebb 5 él indul ki.

Az állítást a pontok száma szerinti indukcióval bizonyítjuk. 1, 2 és 3 pontú gráfokra az állítás triviális. Tegyük fel, hogy az állítás igaz  $n$  csúcús gráfokra, és tekintsünk egy tetszőleges  $n + 1$  csúcús síkra rajzolható gráfot. Ennek létezik legfeljebb 5-ödfokú pontja, legyen  $P$  egy ilyen pont. A  $P$  pont foka szerint három esetet különböztetünk meg.

I. eset:  $P$  legfeljebb 3-adfokú. Hagyjuk el  $P$ -t a belőle induló élekkel együtt. A megmaradó  $G'$  gráf továbbra is síkra rajzolható, és az indukciós feltétel szerint jól színezhető, azaz nem lesz benne egyszínű kör. Ezután  $G'$  egy jó színezéséhez a  $P$ -ből induló éleket színezzük különbözőre. Egyszínű kör  $G'$ -ben nincs, és a  $P$ -n átmenő körök is tartalmaznak két  $P$ -ből induló, különböző színű élt, a kapott színezés tehát jó.

II. eset:  $P$  4-edfokú. Legyenek a  $P$ -vel összekötött pontok  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$ . Ezek között van kettő – mondjuk  $A$  és  $B$  –, amelyek között nincs él, mert  $P$ -vel együtt nem alkothatnak teljes ötszöget. Hagyjuk el a  $P$  pontot a belőle kiinduló élekkel együtt, és húzzuk be az  $AB$  élt (Ez lehetséges, pl. az eredeti  $AP$ ,  $PB$  élekhez elég közel, ld. 8. ábra). A keletkező  $G'$  gráfot színezzük jól. Tegyük fel, hogy az  $AB$  él az 1-es színt kapta. Ezután színezzük  $G$ -ben az  $AP$ ,  $PB$  éleket az 1-es színnel,  $PC$ -t és  $PD$ -t pedig a 2-es és a 3-as színnel. A  $G'$  jó színezése miatt egyszínű kör csak  $P$ -n keresztül haladhatna, és csak a  $P$ -ből kiinduló két egyszínű élen,  $AP$ -n és  $PB$ -n keresztül. Akkor azonban  $G'$  is tartalmazna 1-es színű kört az  $AB$  élen keresztül.

III. eset:  $P$  ötödfokú. Legyenek a  $P$ -ből kiinduló élek a körüljárás sorrendjében  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ ,  $PD$  és  $PE$ . Ha az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  és  $EA$  élek valamelyike nem szerepelne  $G$ -ben, akkor húzzuk be. (Ez lehetséges, mert például ha  $AB$  nem szerepel, akkor az  $A$  és  $B$  pontokat összeköthetjük az  $AP$  és  $PB$  élekhez elég közel.) Ha ezt a bővített gráfot jól színezzük, az az eredeti gráfnak is egy jó színezését adja. A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  és  $EA$  élek szerepelnek a gráfban.

Ezután megmutatjuk, hogy a  $P$  és a belőle induló élek elhagyása után az  $ABCDE$  ötszögnek meghúzható két, egy csúcsból induló átlója. Ha egyik átló sem szerepel  $G$ -ben, akkor behúzzhatjuk  $AC$ -t és  $AD$ -t az  $AP$  és  $PC$ , illetve  $AP$  és  $PD$  élekhez elég közel. Az új élek csak a  $PB$  és  $PE$  élt metszik, így a keletkező  $G'$  gráf síkra rajzolható. Ha például a  $BE$  él szerepel  $G$ -ben, akkor a  $BEP$  háromszög elválasztja  $A$ -t  $C$ -től és  $D$ -től, így  $G$ -ben nem szerepelhet sem az  $AC$ , sem az  $AD$  él. Húzzuk meg ezeket az előbbi módon, majd hagyjuk el  $P$ -t a belőle induló élekkel együtt, így most is síkra rajzolható  $G'$  gráfot kapunk, mert az új élek csak  $PB$ -t és  $PE$ -t metszik. Az indukciós feltevés szerint  $G'$  jól színezhető (9. ábra).

Színezzük jól a  $G'$  gráfot. Ha a színezésben  $AC$  és  $AD$  ugyanolyan, mondjuk 1-es színű, akkor  $G$ -nek a  $G'$ -ben is szereplő élei színét megtartva színezzük az  $AP$ ,  $CP$  és  $DP$  éleket 1-es színnel, a  $BP$  és  $EP$  éleket 2-es, illetve 3-as színnel (10. ábra). Ha az így kapott gráfban van egyszínű kör, akkor az ismét csak 1-es színű lehet,  $P$ -n keresztül halad az  $AP$  és  $PC$ , az  $AP$  és  $PD$  vagy pedig a  $CP$  és  $PD$  éleken keresztül. Ezekben az esetekben viszont  $G'$  is tartalmaz egyszínű kört az  $AC$ , az  $AD$ , illetve a  $CA$  és  $AD$  éleken keresztül. A továbbiakban ezért feltesszük, hogy  $AC$  és  $AD$  színe különböző: 1-es, illetve 2-es.

Hagyjuk el az  $AC$  és  $AD$  átlókat, és vizsgáljuk meg, hogy az ötszög csúcspárjai milyen színű utakkal köthetők össze. Ha létezik két olyan csúcspár:  $X$ ,  $Y$  és  $U$ ,  $V$ , amelyek közül  $X$  és  $Y$  nem köthető össze 1-es,  $U$  és  $V$  pár pedig nem köthető össze 2-es színnel, akkor színezzük ki  $PX$ -et és  $PY$ -t 1-es színnel,  $PU$ -t és  $PV$ -t 2-es színnel, a  $P$ -ből kiinduló ötödik élt pedig 3-as színnel (11. ábra). Ezzel a  $G$  gráf egy jó színezését kapjuk.

Mivel az  $AC$  él 1-es színű volt,  $A$  és  $C$  nem köthető össze 1-es színnel; hasonlóképpen  $A$  és  $D$  nem köthető össze 2-es színnel. Ha a  $B$ ,  $D$ ,  $E$  csúcsok közül valamelyik kettő nem köthető össze 2-es színnel, akkor azt a kettőt  $U$ ,  $V$ -nek,  $A$ ,  $C$ -t pedig  $X$ ,  $Y$ -nak választva, az előbbieket szerint  $G$ -nek egy jó színezését nyerjük. Ha viszont  $B$ ,  $D$  és  $E$  összeköthető 2-es színnel, akkor  $A$  nem köthető össze  $B$ -vel és  $E$ -vel 2-es színű úton, mert akkor  $A$  és  $D$  is összeköthető lenne 2-es színnel. Hasonlóképpen feltehetjük, hogy a  $B$ ,  $C$  és  $E$  csúcsok összeköthetők 1-es színnel, míg az  $A$  csúcs nem köthető össze a  $B$  és  $E$  csúcsokkal 1-es színű úton sem (12. ábra).

Az  $A$  csúcs tehát nem köthető össze a  $B$ , és  $E$  csúcsokkal sem 1-es, sem 2-es színű úton. Ebből következik, hogy az  $AB$  és  $AE$  élek színe 3-as, és az  $A$ ,  $B$ ,  $E$  csúcsok között csak ezek az élek alkotnak 3-as színű utat. Színezzük át  $AB$ -t 1-esre,  $AE$ -t pedig 2-esre. Ezzel a változtatással nem keletkezik egyszínű kör. Ezután színezzük ki a  $PA$ ,  $PB$  és  $PE$  éleket 3-asra, a  $PC$  és  $PD$  éleket pedig 1-esre, illetve 2-esre (13. ábra). Ha lenne egyszínű kör, akkor az csak  $P$ -n keresztül haladhatna, és csak 3-as színű lehetne, és azt jelentené, hogy az  $A$ ,  $B$  és  $E$  csúcsok közül valamelyik kettő között még egy 3-as színű út halad, ami ellentmondás.

Ezzel minden  $n + 1$  csúcús gráfra igazoltuk az állítást.

*Megjegyzések.* 1. Az, hogy a teljes ötszög nem síkra rajzolható, például a következőképpen mutatható meg: Kössük össze a pontokat valamilyen sorrendben egymást nem metsző élekkel. A keletkező ötszög belsejében is, rajta kívül is csak két-két pontpárt köthet össze él, ezek a megmaradó csúcspárt elválasztják egymástól (14. ábra).

2. Síkra rajzolható gráfok a síkot lapokra bontják, ezekhez hozzávéve a gráfon kívüli tartomát is. Ha a gráf összefüggő, akkor a lapok  $l$ , az élek  $e$  és a csúcsok  $c$  száma között fennáll az Euler-féle  $l - e + c = 2$  összefüggés. Ha a csúcsok száma legalább 3, akkor egy lapnak legalább 3 oldala van, másrészt minden él két lapnak oldala, így  $3l \leq 2e$ . Ezt az Euler-tételbe helyettesítve az  $e \leq 3c - 6$  egyenlőtlenség adódik. Ha minden csúcs legalább 6-odfokú lenne, akkor – mivel minden él két csúcshoz tartozik –,  $e \geq 3c$  teljesülne.

3. Könnyen igazolható, hogy ha egy  $k$  csúcsú gráf nem tartalmaz kört, akkor legfeljebb  $k - 1$  éle van. Ha azt vizsgáljuk, hogy egy tetszőleges  $G$  gráf élei mikor színezhetők ki 3 színnel úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör, akkor szükséges, hogy tetszőleges  $k$  pozitív egészre  $G$  bármely  $k$  csúcsa között legfeljebb  $3k - 3$  él haladjon. Ez a feltétel gyengébb, mint a síkra rajzolhatóság, és be lehet bizonyítani, hogy nemcsak szükséges, hanem elégséges is.



