I. megoldás. Tekintsük az O, O_1 és M_1 pontok merőleges vetületeit az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalaira. Elegendő azt megmutatni, hogy az ezek közti szakaszok aránya két különböző oldalon megegyező. Határozzuk meg ezt az arányt pl. a B_1C_1 oldalon. F-fel jelölve az ABC háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját, ezen átmegy az O-ból a BC oldalra emelt merőleges is és az A-ból induló szögfelező is. Jelöljük a köztük levő szöget δ-val (2. ábra). Az O_1A_1 érintési sugár szintén merőleges a BC oldalra.

O, O_1 és M_1 merőleges vetületét a B_1C_1 oldalon jelöljük O', O_1' és M_1'-vel. Az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú, ezért O_1' AF-en van, tehát A_1M_1 párhuzamos AF-fel, és így $O_1A_1M_1\sphericalangle=\delta$. Az O-ból AF-re és O_1-ből A_1M_1'-re emelt merőleges szakaszok egyrészt az $O'O_1'$, illetőleg $O_1'M_1'$ szakasszal egyenlők, másrészt hosszuk $R\sin\delta$, illetőleg $r\sin\delta$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara, r a beírt köré. Így

$$O'O_1':O_1'M_1'=(R\sin\delta):(r\sin\delta)=R:r.$$

Ez az arány azonban csak a két kör adataitól függ, a B_1C_1 oldaltól nem, így ugyanez az arány adódik a másik két oldalon levő vetületek közti szakaszokra is. Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyert.

II. megoldás. A megoldáshoz felhasználunk a háromszögekre vonatkozó néhány összefüggést, amelyeket a megoldás végén bizonyítunk.

Jelöljük az $A_1B_1C_1$ háromszög csúcsaiból húzott magasságok talppontját rendre A_2, B_2, C_2-vel (3. ábra).

a) Egy háromszög magasságai felezik a talpponti háromszög szögeit, így a magasságpont a talpponti háromszögbe írt kör középpontja, esetünkben M_1 az $A_2B_2C_2$-be írté.

b) Ismeretes, hogy a háromszög (esetünkben az $A_1B_1C_1$ háromszög) köré írt körnek a csúcsokhoz mutató sugarai merőlegesek a talpponti háromszög oldalaira. Esetünkben O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 érintési sugár is, tehát merőleges rendre a BC, CA, AB oldalra is, tehát az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszög oldalai párhuzamosak.

c) A két háromszög hasonló helyzetű is, s így rájuk vonatkozóan megfelelő pontpárok összekötő egyenesei is párhuzamosak.

d) Az $A_2B_2C_2$ háromszög köré írt kör az $A_1B_1C_1$ háromszög ún. Feuerbach-köre, ez átmegy az oldalak felezőpontjain is, és középpontja az O_1M_1 szakasz F_0 felezőpontja.

Az ABC háromszögre vonatkozóan O és O_1 megfelelői az $A_2B_2C_2$-re vonatkozóan F_0 és M_1, így összekötő egyeneseik párhuzamosak. A két egyenesnek azonban O_1 közös pontja, így O, O_1 és M_1 egy egyenesen van, és ezt kellett bizonyítani.

Bebizonyítjuk a felhasznált összefüggéseket.

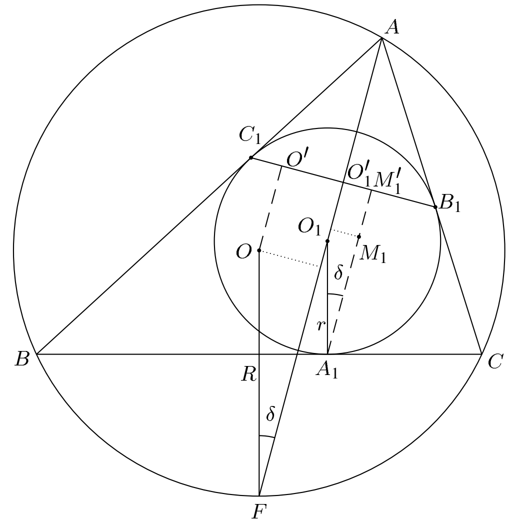
a) Jelöljük az ABC háromszög egymás utáni csúcsaiból húzott magasságainak talppontját T_a, T_b, T_c-vel (4. ábra). Az ABT_aT_b és az ACT_aT_c négyszög húrnégyszög, így $T_cT_aB\sphericalangle=CAB\sphericalangle$ és $T_bT_aC\sphericalangle=BAC\sphericalangle$, tehát AT_a szögfelező.

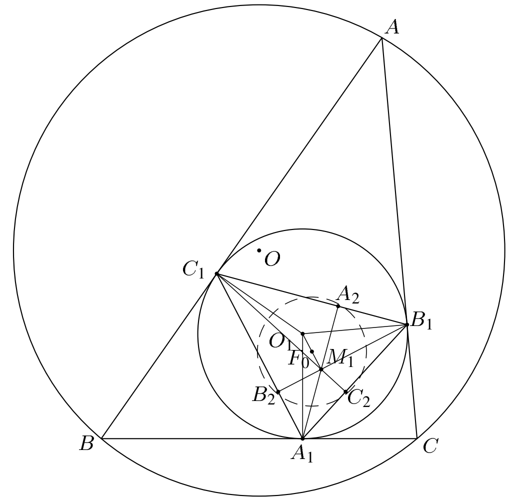
b) Az ABC háromszög köré írt O középpontú körben az $AOB\sphericalangle$ mint középponti szög az $ACB\sphericalangle$ kétszerese (5. ábra). Szögfelezője merőleges AB-re, és $ACB\sphericalangle$ nagyságú szöget zár be vele. A C pontból húzott magasság T_c talppontjából állítsunk merőlegest OA-ra, messe ez a CA oldal egyenesét a T^* pontban. Ekkor $AT_cT^*\sphericalangle$ mint merőleges szárú szög ugyancsak $ACB\sphericalangle$ nagyságú, tehát BCT^*T_C húrnégyszög, benne a BC oldal T_C-ből derékszögben látszik, tehát T^*-ból is, vagyis T^* a B-ből húzott magasság talppontja, T_b.

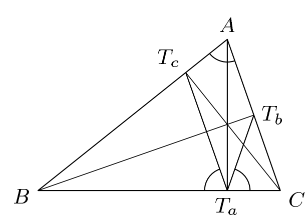
c) Azt kell belátnunk, hogy ha az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak, akkor AA_2, BB_2 és CC_2 egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak (6. ábra). Ha pl. AA_2 és BB_2 metszi egymást egy T pontban, akkor ABT és A_2B_2T hasonló háromszögek, így $AT:A_2T=AB:A_2B_2=BT:B_2T$. Másrészt $AB:A_2B_2=BC=B_2C_2$. Ekkor azonban a BCT és a B_2C_2T háromszög is hasonló, mert egy szögük és az azt közrefogó oldalak aránya egyenlő. Ebből viszont következik, hogy C, C_2 és T is egy egyenesen van.

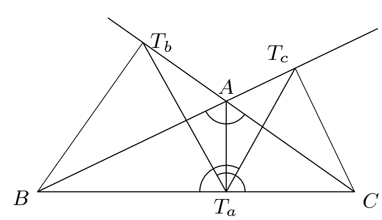
d) A Feuerbach-körre vonatkozó állítások igazolására jelöljük a BC, CA, AB oldalak felezőpontjait rendre F_a, F_b, F_c-vel (7. ábra. Az A csúcs tükörképe az F_bF_c középvonalra a T_a magasságtalppont. F_aF_c mint középvonal F_bA-val egyenlő és párhuzamos, a tükrözés folytán pedig F_bT_a-val egyenlő. Így $F_aT_aF_bF_c$ szimmetrikus trapéz (lehet hurkolt, esetleg egyenlő szárú háromszög). Így kör írható köré, amelynek középpontja az F_aT_a szakasz felezőmerőlegesén van, az pedig felezi az O és az M magasságpont közti szakaszt.

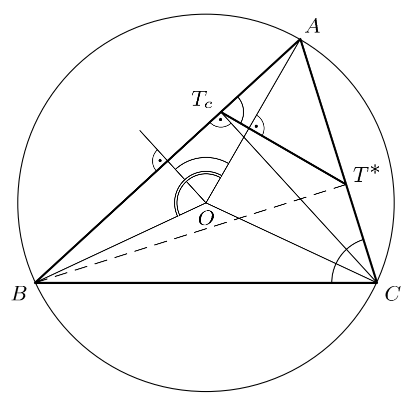
A kör átmegy mind a három oldal felezőpontján, így a gondolatot a másik két oldalra megismételve, ugyanaz a kör adódik, sőt, azt is kapjuk, hogy a kör középpontja az OM szakasz F_0 felezőpontja. Az oldafelezőpontok és a magasságtalppontok közül bármelyik 3 különböző már meghatározza a kört.

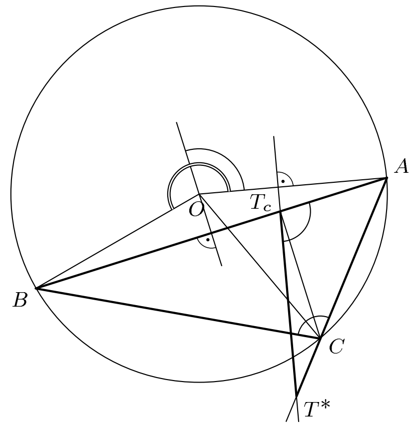

A
C1
O′
O′1
M′1
B1
O1
O
M1
δ
r
B
R
A1
C
δ
F

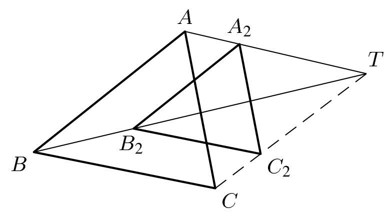

A
O
C1
A2
B1
O1
F0
M1
B2
C2
B
A1
C

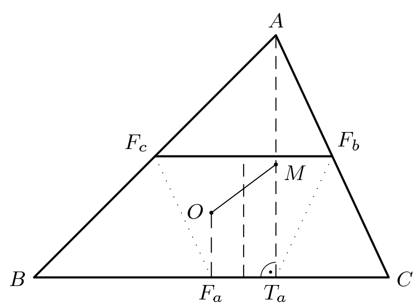

A
Tc
Tb
B
Ta
C


Tb
Tc
A
B
Ta
C


A
Tc
T*
O
B
C


A
O
T_c
B
C
T^*


A
A_2
T
B_2
B
C_2
C


A
F_c
F_b
M
O
B
C
F_a
T_a