

Bebizonyítjuk, hogy azok az $A : (i, y(i))$ pontok, amelyeknél $y(x)$ az x^2 (legkisebb nemnegatív) maradéka p -vel történő osztásnál ($0 \leq i \leq p-1$), kielégítik a követelményt. Az értelmezés szerint $y(x) = x^2 + cp$ alkalmas c egészszel. Tegyük fel, hogy az $A_i A_j$ és az $A_i A_k$ szakaszok meredeksége egyenlő volna:

$$\frac{y(j) - y(i)}{j - i} = \frac{y(k) - y(i)}{k - i}.$$

A törteket eltávolítva, az értelmezést felhasználva és átrendezve:

$$(k - i)(j^2 - i^2 + (v - u)p) = (j - i)(k^2 - i^2 + (w - u)p),$$

továbbrendezve és alakítva

$$(k - i)(j - i)(j - k) = p((j - i)(w - u) - (k - i)(v - u)).$$

A bal oldali szorzatnak kellene tehát oszthatónak lennie p -vel. Ez azonban nem lehetséges, mert egy szorzat csak úgy lehet osztható egy prímszámmal, ha valamelyik tényezője osztható vele, itt pedig mindegyik tényező 0-tól különböző és abszolút értékük p -nél kisebb. Nem lehet tehát a két meredekség egyenlő.

Megjegyzések. 1. Az x^2 helyett bármilyen egész együtthatós vagy egész helyeken egész értéket felvevő, másodfokú polinom megfelel. Érdekes, hogy a feladattal foglalkozó versenyzők többnyire az $\frac{x(x+1)}{2}$ polinomot választották.

2. Többen használtak olyan pontatlan állításokat, mint különbség maradéka egyenlő a maradékok különbségével, vagy szorzat maradéka egyenlő a tényezők maradékainak szorzatával, amelyek csak kiegészítésekkel érvényesek.

3. Egy versenyző azokat az (x, y) pontokat adta meg, amelyekre $xy \equiv 1 \pmod{p}$ ($1 \leq x \leq p-1$), maga is megjegyezve, hogy így csak $p-1$ pontot kap.

4. A kérdésnek kiterjedt irodalma van. A feladat állítása igaznak látszik prímszám helyett minden pozitív egész számra, sőt próbálgatások során $n = 32$ -ig és számos nagyobb páros n -re $2n$ pontot is sikerült találni úgy, hogy ne legyen közülük 3 egy egyenesen. Sikerült bizonyítani, hogy tetszés szerinti pozitív h értékhez $(3/2) - h)n$ pont is kiválasztható, ha n elég nagy.

A problémával kapcsolatban R. K. Guy és P. A. Kelly több érdekes sejtést fogalmazott meg. Így többek közt azt sejtik, hogy csak az 1. ábrán látható 3 esetben helyezhető el $2n$ pont egy n oldalhosszú négyzetben úgy, hogy rendelkezék a négyzet összes szimmetriájával; azt sejtik továbbá, hogy nagy n -re legfeljebb $(c + h)n$ pont helyezhető el a követelménynek megfelelően, ahol $c = (2\pi^2/3)^{1/3} \approx 1,85$.¹ R. K. Guy: *Unsolved problems in number theory*, 2. kiad. Springer, 1996. XVI + 285 old., közelebbről 242–244. old.

