Az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok definíciójából következik, hogy A_1 a BCD; A pedig a $B_1C_1D_1$ háromszög belső pontja. Ezért léteznek olyan b, c, d, b_1, c_1, d_1 pozitív valós számok, amelyekre

$$b \cdot \overrightarrow{A_1B} + c \cdot \overrightarrow{A_1C} + d \cdot \overrightarrow{A_1D} = \mathbf{0} \qquad \text{és} (1) b_1 \cdot \overrightarrow{AB_1} + c_1 \cdot \overrightarrow{AC_1} + d_1 \cdot \overrightarrow{AD_1} = \mathbf{0}. (2)$$

Ezekről a valós számokról még azt is feltehetjük, hogy

(3)
$$\frac{A_1M}{MA} = \frac{b_1 + c_1 + d_1}{b + c + d},$$

mert ha egy számhármas kielégíti (1)-et vagy (2)-t, akkor mindhárom tagját ugyanazzal a (pozitív) konstanssal szorozva ismét a feltételt kielégítő számhármast kapunk. (Az (1)–(3) feltételek azt jelentik, hogy az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek csúcsaiba megfelelő súlyokat helyezve a súlyozott pontrendszer súlypontja M, a két súlyozott háromszög súlypontja pedig A_1, illetve A.)

A (3) feltételből következik, hogy $\overrightarrow{MA}(b_1 + c_1 + d_1) + \overrightarrow{MA_1}(b + c + d) = \mathbf{0}$. Ezt az (1) egyenlethez adva és rendezve:

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{MA}(b_1 + c_1 + d_1) + \overrightarrow{MA_1}(b + c + d) + \overrightarrow{A_1B} \cdot b + \overrightarrow{A_1C} \cdot c + \overrightarrow{A_1D} \cdot d =$$

(4)
$$\overrightarrow{MA}(b_1 + c_1 + d_1) + \overrightarrow{MB} \cdot b + \overrightarrow{MC} \cdot c + \overrightarrow{MD} \cdot d.$$

Legyen N' az AD szakasznak az a pontja, amelyre

$$\frac{DN'}{N'A} = \frac{b_1 + c_1 + d_1}{d}$$

teljesül. Ekkor $\overrightarrow{AN'}(b_1 + c_1 + d_1) + \overrightarrow{DN'} \cdot d = \mathbf{0}$, amit (4)-hez adva és rendezve:

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN'})(b_1 + c_1 + d_1) + \overrightarrow{MB} \cdot b + \overrightarrow{MC} \cdot c + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN'}) \cdot d = \mathbf{0}, \quad \text{azaz}$$
$$\overrightarrow{MN'}(b_1 + c_1 + d_1 + d) + \overrightarrow{MB} \cdot b + \overrightarrow{MC} \cdot c = \mathbf{0}.$$

Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha az $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ és $\overrightarrow{MN'}$ egy síkban van, azaz ha N' benne van az MBC síkban. Az MBC sík és az AD egyenes döféspontja viszont N, ezért $N' \equiv N$. Tehát N az AD szakaszt $d : (b_1 + c_1 + d_1)$ arányban osztja. Teljesen hasonló számolással látható be, hogy

$$\frac{AP}{PB} = \frac{b}{b_1 + c_1 + d_1} \qquad \text{és} \qquad \frac{AQ}{QC} = \frac{c}{b_1 + c_1 + d_1}.$$

Mivel a BCD és a $B_1C_1D_1$ síkok párhuzamosak, azért az A_1DN háromszög hasonló a D_1NA háromszöghöz, tehát $\frac{AD_1}{A_1D} = \frac{AN}{ND} = \frac{d}{b_1 + c_1 + d_1}$, s ezért

$$\overrightarrow{AD_1} = \frac{d}{b_1 + c_1 + d_1} \cdot \overrightarrow{A_1D}.$$

Hasonló okoskodással kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AB_1} = \frac{b}{b_1 + c_1 + d_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{AC_1} = \frac{c}{b_1 + c_1 + d_1} \cdot \overrightarrow{A_1C}.$$

Az utolsó három egyenlőséget összeadva és (1)-et felhasználva:

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AD_1} = \frac{1}{b_1 + c_1 + d_1}\left(d \cdot \overrightarrow{A_1D} + b \cdot \overrightarrow{A_1B} + c \cdot \overrightarrow{A_1C}\right) = \mathbf{0}.$$

Ez viszont csak akkor teljesül, ha az A pont a $B_1C_1D_1$ háromszög súlypontja, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján