I. megoldás. Hozzuk egyszerűbb alakra az emeletes törtet:

$$\frac{\frac{1}{AC_1}-\frac{1}{AB}}{\frac{1}{C_{n-1}B}-\frac{1}{AB}}=\frac{AB-AC_1}{AB-C_{n-1}B}\cdot\frac{C_{n-1}B}{AC_1}=\frac{BC_1\cdot BC_{n-1}}{AC_1\cdot AC_{n-1}}.$$

A C_1 és C_{n-1} pontokra igaz, hogy $ACC_1\sphericalangle=BCC_{n-1}\sphericalangle$. Megmutatjuk, hogy ha D és E az AB oldal olyan pontjai, amelyekre $ACD\sphericalangle=BCE\sphericalangle=\varphi$, akkor $\frac{BD\cdot BE}{AD\cdot AE}=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$, ami eredeti feladatunknak általánosítása. Legyen $DCE\sphericalangle=\delta$, $CAB\sphericalangle=\alpha$ és $CBA\sphericalangle=\beta$ (lást az *1. ábrát*). Ekkor a szinusztételt alkalmazva a BCD, BCE, ACD, ACE és ABC háromszögekben, kapjuk, hogy

$$\frac{BD\cdot BE}{AD\cdot AE}=\frac{\left(CD\cdot\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\sin\beta}\right)\cdot\left(CE\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}\right)}{\left(CD\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(CE\cdot\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\sin\alpha}\right)}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2.$$

Mansur Boase (London, Anglia) dolgozata alapján

Megjegyzés. A bizonyítás során felhasználtuk, hogy D az AE szakaszon van, azaz $2\varphi<ACB\sphericalangle$. Ha $2\varphi\geq ACB\sphericalangle$, az állítás akkor is igaz, a bizonyításon csak annyit kell módosítani, hogy $\varphi+\delta$ helyett $\varphi-\delta$-t írunk.

II. megoldás. Ismét azt mutatjuk meg, hogy $\frac{BC_1\cdot BC_{n-1}}{AC_1\cdot AC_{n-1}}$ állandó. Messe a CC_1C_{n-1} háromszög köré írható kör az AC és a BC szakaszokat a D és az E pontokban (*2. ábra*). Mivel a körben $DCC_1\sphericalangle=ECC_{n-1}\sphericalangle$, azért $DC_1=EC_{n-1}$, tehát a DE szakasz a szimmetria miatt párhuzamos AB-vel. Ezért a párhuzamos szelők tétele alapján $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$. Másrészt az A, illetve a B pontnak a körre vonatkozó hatványát kétféleképpen felírva kapjuk, hogy $AC_1\cdot AC_{n-1}=AD\cdot AC$ és $BC_1\cdot BC_{n-1}=BE\cdot BC$. Ezeket felhasználva:

$$\frac{BC_1\cdot BC_{n-1}}{AC_1\cdot AC_{n-1}}=\frac{BE\cdot BC}{AD\cdot AC}=\frac{BE}{AD}\cdot\frac{BC}{AC}=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2,$$

ami állandó.

Pap Júlia (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján