Mivel az a_i-k különbözőek, feltehetjük, hogy $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. A feladatot az n-re vonatkozó teljes indukcióval fogjuk megoldani.

Ha $n = 1$, akkor $a_1^5 + a_1^7 \geq 2a_1^6$ bizonyítandó. Ezt a_1^3-nal osztva $a_1^2 + a_1^4 \geq 2a_1^3$ adódik, amivel ekvivalens a következő: $(a_1^2 - a_1)^2 \geq 0$. Ez utóbbi nyilvánvaló; egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1 = 1$.

Tegyük fel ezután, hogy valamely n-re teljesül a feladat állítása, majd mutassuk meg, hogy ekkor teljesül a következő is: (tetszőleges $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ pozitív egészekre):

$$a_1^5 + \dots + a_n^5 + a_{n+1}^5 + a_1^7 + \dots + a_n^7 + a_{n+1}^7 \geq 2(a_1^3 + \dots + a_n^3 + a_{n+1}^3)^2,$$

azaz

$$\begin{gathered}(a_1^5 + \dots + a_n^5) + (a_1^7 + \dots + a_n^7) + a_{n+1}^5 + a_{n+1}^7 \geq \\ \geq 2(a_1^3 + \dots + a_n^3)^2 + 2(a_{n+1}^6 + 2a_1^3 a_{n+1}^3 + \dots + 2a_n^3 a_{n+1}^3).\end{gathered}$$

Az indukciós feltevés következtében a bal oldalon lévő két zárójeles kifejezés összege nem kisebb, mint a jobb oldal első tagja, ezért elegendő azt bizonyítani, hogy

$$a_{n+1}^5 + a_{n+1}^7 \geq 2(a_{n+1}^6 + 2a_1^3 a_{n+1}^3 + \dots + 2a_n^3 a_{n+1}^3).$$

Osszuk el mindkét oldalt a_{n+1}^3-nel, és rendezzük a következőképpen:

$$a_{n+1}^4 + a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}^3 \geq 4(a_1^3 + \dots + a_n^3),$$

majd 4-gyel osztva

$$\left(\frac{(a_{n+1} - 1)a_{n+1}}{2}\right)^2 \geq a_1^3 + \dots + a_n^3. \tag{1}$$

A megoldás utolsó lépésében felhasználjuk az

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{2}$$

összefüggést, amelyet könnyen beláthatunk (az n szerinti) teljes indukcióval.

Most $(a_{n+1} - 1)$-et írva n helyébe (2)-ben:

$$1^3 + 2^3 + \dots + (a_{n+1} - 1)^3 = \left(\frac{(a_{n+1} - 1)a_{n+1}}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Ezután (1)-ben a bal oldal helyébe beírjuk (3) bal oldalát:

$$1^3 + 2^3 + \dots + (a_{n+1} - 1)^3 \geq a_1^3 + \dots + a_n^3.$$

Mivel $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$, az állítás nyilvánvalóan igaz. Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a_i = i$.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. A megoldó felhasználta *Bogdán Zoltán:* Matematika feladatok – ötletek – megoldások c. könyvének II. 69. oldal 42. feladatát.

Balogh Attila (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 11. évf.)