Megmutatjuk, hogy a_n nem más, mint az $(1+x+x^2)^n$ polinomban x^n együtthatója. Jelöljük egyelőre c_n-nel az x^n együtthatóját az $(1+x+x^2)^n$ polinomban. Azt könnyű ellenőrizni, hogy $c_0=a_0=1$ és $c_1=a_1=1$. Mivel

$$(1+x+x^2)^n = x^n\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n = x^n\sum_{k=0}^{n} n\mathrm{ch}\,oosek\left(x+\frac{1}{x}\right)^k,$$

ebből az alakból kiolvasható, hogy

$$c_n=\sum_{0\le k\le\frac{n}{2}} n\mathrm{ch}\,oose2k2k\mathrm{ch}\,oosek=\sum_{0\le k\le\frac{n}{2}}\frac{n!}{k!^2(n-2k)!}. \tag{1}$$

Az (1) azonosság egyszerű átrendezéseiből kapjuk, hogy

$$c_{n+1}=\sum_{0\le k\le\frac{n+1}{2}}\frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot n(n+1), c_n=\sum_{0\le k\le\frac{n+1}{2}}\frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot n(n-2k+1), c_{n-1}=\sum_{0\le k\le\frac{n-1}{2}}\frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k-1)!}=\sum_{0\le k}$$

Ezek alapján

$$(2n+1)c_n+3nc_{n-1}=(2n+1)c_n+4nc_{n-1}-nc_{n-1}=$$
$$=\sum_{0\le k\le\frac{n+1}{2}}\frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot\big((2n+1)n(n-2k+1)+4nk^2-n(n-2k)(n-2k+1)\big)=$$
$$=\sum_{0\le k\le\frac{n+1}{2}}\frac{(n-1)!}{k!^2(n-2k+1)!}\cdot n(n+1)^2=(n+1)c_{n+1},$$

vagyis az (a_n) és (c_n) sorozatokra ugyanaz a rekurzió teljesül.

Megjegyzések. 1. Egy polinom együtthatóit komplex függvénytani eszközökkel is lehet kezelni. Például az $(x^2+x+1)^n$ polinomban x^n együtthatóját felírhatjuk a következő alakban:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{2it}+e^{it}+1\right)^n e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Ebből a rekurzió parciális integrálással nyerhető. (A feladat innen származik.)

2. Lippner Gábor és Lukács László az $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ generátorfüggvény vizsgálatával egy érdekes azonosságot fedezett fel:

$$a_0a_n+a_1a_{n-1}+\dots+a_{n-1}a_1+a_na_0=\frac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}. \tag{2}$$

Nem nehéz végiggondolni, hogy F definíciója $|x|<\frac{1}{3}$ esetén értelmes, és ebben az intervallumban teljesül rá a

$$(3x^2+2x-1)F'(x)+(3x+1)F(x)=0;\quad F(0)=1$$

homogén lineáris differenciálegyenlet. Ezt megoldva $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-3x)(1+x)}}$,

$$F^2(x)=\frac{\frac{3}{4}}{1-3x}+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}x^n.$$

Másfelől

$$F^2(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0a_n+\dots+a_na_0)x^n,$$

és a függvény az együtthatókat egyértelműen meghatározza, ebből (2) következik.

Természetesen (2) bizonyításához nincs szükség analitikus eszközökre, teljes indukcióval is igazolható.

A (2) azonosságból a feladat állítása viszonylag egyszerűen következik.