Legyen $P$ és $Q$ két olyan pont, amelyre a $PQ = d$ távolság maximális. Osszuk a maradék pontokat két csoportba aszerint, hogy $P$-hez vagy $Q$-hoz vannak közelebb. (Ha egy pont $P$-től és $Q$-tól ugyanolyan távolságra van, akkor tetszés szerint bármelyik csoportba tehetjük.)

Legyen a $Q$-hoz közelebbi pontok száma $k$. Nyilván feltehetjük, hogy ez a nagyobbik csoport, vagyis $k \geq \frac{n}{2}$. Állítsuk sorba a $Q$-hoz közelebbi pontokat a $P$-től való távolság szerint; legyenek a pontok $R_1$, $R_2$, $\ldots$, $R_k = Q$, ahol $PR_1 \leq PR_2 \leq \cdots \leq PR_k = d$.

Ha $PR_1 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{d}{2}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenségből $QR_1 \geq PQ - PR_1 \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{d}{2}$, és e két egyenlőtlenségből $1 \leq \frac{PR_1}{QR_1} \leq \frac{n+1}{n-1}$, vagyis az $A = P$, $B = R_1$, $C = Q$ pontok megfelelőek. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $PR_1 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{d}{2}$.

Ha valamelyik $1 \leq i < k$-ra $PR_{i+1} \leq \frac{n+1}{n-1}PR_i$, akkor szintén készen vagyunk, mert az $A = R_{i+1}$, $B = P$, $C = R_i$ pontokra teljesül a feltétel.

Mivel

$$\frac{PR_2}{PR_1} \cdot \frac{PR_3}{PR_2} \cdot \ldots \cdot \frac{PR_k}{PR_{k-1}} = \frac{PR_k}{PR_1} < \frac{d}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{d}{2}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}, \tag{1}$$

elég azt igazolni, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{k-1} \geq 2;$$

ebből következik, hogy (1) bal oldalán valamelyik tényező értéke legfeljebb $\frac{n+1}{n-1}$.

A Bernoulli egyenlőtlenség alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{k-1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n-1}(k-1)\right) \geq$$
$$\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-2}{2}\right) = 2 + \frac{n-3}{n(n-1)} \geq 2.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.