Jelöljük a megállók számát n-nel. Ekkor a megálló-párok száma $\binom{n}{2}$. Tudjuk, hogy bármely két megálló között van buszjárat, és hogy bármely két buszjáratnak 1 közös megállója van, tehát 2 megálló között pontosan egy buszjárat közlekedik. Mivel minden buszjáratnak 3 megállója van, ezért a buszjáratok száma $\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{6}$, így a járatok páronkénti közös megállóinak száma

$$k=\binom{\frac{n(n-1)}{6}}{2}=\frac{\frac{n(n-1)}{6}\left(\frac{n(n-1)}{6}-1\right)}{2}.$$

Másrészt minden megállóban $\frac{n-1}{2}$ buszjárat áll meg (minden buszjárathoz 2 másik megálló van), ezért minden megálló $\binom{\frac{(n-1)}{2}}{2}=\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}$ közös megállónak felel meg. Tehát $k=n\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}$, vagyis

$$\frac{\frac{n(n-1)}{6}\cdot\left(\frac{n(n-1)}{6}-1\right)}{2}=n\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}.$$

Ebből $n^2-10n+21=0$, azaz $n=3$ vagy $n=7$.

Az $n=3$ esetben 1 buszjárat van, amire nyilvánvaló a feladat állítása. Az $n=7$ esetben 7 buszjárat van, amire a következő példát lehet mutatni:

Ha a buszmegállókat 1, 2, 3, …, 7-tel jelöljük, akkor a következő buszjáratok kielégítik a feladat feltételeit:

$$\{1,2,3\},\quad \{1,4,5\},\quad \{1,6,7\},\quad \{2,4,6\},$$
$$\{2,5,7\},\quad \{3,4,7\},\quad \{3,5,6\}.$$

Tehát 1 vagy 7 buszjárat lehet a városban.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. évf.)

Megjegyzés. A feladatbeli megállók járatonkénti csoportosítása speciális esete a következő típusú konfigurációknak. Tekintsünk egy n elemű halmazt és ennek bizonyos részhalmazait azzal a két tulajdonsággal, hogy
(1) bármely két ilyen (különböző) részhalmaznak pontosan egy közös eleme van; és
(2) bármely két (különböző) elemet véve a halmazban, pontosan egy olyan kijelölt részhalmaz létezik, amelynek mindketten elemei.

Az (1) és (2) tulajdonságoknak eleget tevő halmazrendszereket – bizonyos, nyilvánvalóan triviális elrendezéstől eltekintve – *véges projektív síkoknak* nevezzük; a természetes geometriai analógia alapján a halmaz elemeit pontoknak, a kijelölt részhalmazokat egyeneseknek hívjuk. Könnyen belátható, hogy egy projektív sík egyeneseinek a száma ugyanannyi, mint a pontok száma, azaz n. Azt sem nehéz bizonyítani, hogy minden egyenesnek ugyanannyi pontja van – szokás ezt a számot $(q+1)$-gyel jelölni – és ez a szám megegyezik egy tetszőleges ponton átmenő egyeneseknek a számával. Az is egyszerűen adódik ezután, hogy $n=q^2+q+1$.

Az úgynevezett véges testek felhasználásával konstruálni lehet véges projektív síkot minden olyan esetben, amikor q prímhatvány. Vannak azonban olyan síkok, amelyek ezzel az általános eljárással nem állíthatók elő. Olyan síkot azonban még senki sem talált, amelyben q ne lett volna prímhatvány. Ezzel kapcsolatos a véges matematika egy nevezetes, mindeddig megoldatlan problémája: milyen q értékekre létezik q-adrendű véges projektív sík (lehet-e q más is, mint egy prímszám egész kitevős hatványa)?