Mutatunk egy ilyen polinomot. Azt állítjuk, hogy az

$$f(x,\ y,\ z)=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)==2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4(1)$$

polinom megfelelő.

Többek között a polinom második alakjából is látható, hogy értéke nem függ x, y, z előjelétől, hanem csak abszolút értékeiktől. Elég tehát azt igazolni, hogy egy nemnegatív x, y, z számhármasra $f(x,\ y,\ z)$ pontosan akkor pozitív, ha az x, y, z hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető.

Ha x, y, z egy háromszög oldalai, akkor egyikük sem lehet 0, ezért (1)-ben az $x+y+z$ tényező pozitív, a háromszög-egyenlőtlenség szerint pedig a többi három tényező is; emiatt $f(x,\ y,\ z)>0$.

Megfordítva, ha $f(x,\ y,\ z)>0$, akkor azt kell igazolnunk, hogy x, y, z egyike sem 0, és teljesül mindhárom háromszög-egyenlőtlenség. Mivel f szimmetrikus a három változóra, feltehetjük, hogy $0\le x\le y\le z$. Ebben az esetben $x+y+z\ge 0$, $-x+y+z\ge 0$ és $x-y+z\ge 0$ triviálisan teljesül, a négy tényező közül legfeljebb csak $x+y-z$ lehetne negatív. Mivel $f(x,\ y,\ z)>0$, ez azt jelenti, hogy mind a négy tényező pozitív, vagyis a háromszög-egyenlőtlenségek teljesülnek. Ennek egyik következménye, hogy $x\ge x+y-z>0$ miatt x, y, z mindegyike pozitív.

Megjegyzés. A Héron-képletben a négyzetgyök alatti kifejezés lényegében az f polinom:

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{1}{16}f(a,\ b,\ c)}.$$

Nem nehéz bebizonyítani, hogy konstans szorzótól eltekintve ez az egyetlen negyedfokú polinom, amely a feladat feltételeinek eleget tesz.