I. megoldás. Megmutatjuk, hogy $2\cdot(3n)!$ prímtényezős felbontásában bármelyik prímszám legalább akkora kitevővel szerepel, mint $n!(n+1)!(n+2)!$ felbontásában.

Felhasználjuk azt a Legendre-tól származó tételt, miszerint $k!$ prímtényezős felbontásában egy tetszőleges p prímszám kitevője

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{k}{p^\alpha}\right]=\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\dots .$$

Az összegnek csak az első $\left[\log_p n\right]$ tagja nem 0, elég az összeget idáig felírni.) A tétel és bizonyítása megtalálható pl. Erdős–Surányi: *Válogatott fejezetek a számelméletből* c. könyvének 29. oldalán (XII. tétel).

A tételt alkalmazva a $k=n$, $k=n+1$, $k=n+2$ és $k=3n$ esetekre, azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $p>2$ esetén

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{p^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+2}{p^\alpha}\right]\le\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{p^\alpha}\right],\tag{1}$$

illetve $p=2$ esetén

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2^\alpha}\right]+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n+2}{2^\alpha}\right]\le 1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{2^\alpha}\right].\tag{2}$$

Az $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$ azonosság alapján tetszőleges $p^\alpha\ge 3$-ra

$$\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\left[\frac{n+1}{p^\alpha}\right]+\left[\frac{n+2}{p^\alpha}\right]\le\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]+\left[\frac{n}{p^\alpha}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{n}{p^\alpha}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{3n}{p^\alpha}\right],$$

továbbá az $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$ azonosság felhasználásával

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2}\right]=n+\left[\frac{n}{2}\right]+1=\left[\frac{3n}{2}\right]+1.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből (1) és (2) azonnal következik.

II. megoldás. Felhasználjuk, hogy ha p, q és r nem-negatív egész számok, akkor $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ egész. (Például p darab A, q darab B és r darab C betűből $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ féle szó készíthető.)

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\frac{2\cdot(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}=\frac{(3n)!}{n!^3}+17\frac{(3n)!}{(n-1)!^2(n+2)!}-7\frac{(3n+1)!}{(n-1)!n!(n+2)!}+\frac{(3n+1)!}{(n-1)!(n+1)!^2}.$$

A jobb oldalon mindegyik tag egész.

Megjegyzések. 1. Az első megoldás gondolatmenetét követve igazolható, hogy tetszőleges k és n pozitív egészekre $1!\cdot2!\cdot\dots\cdot(k-1)!\cdot(kn)!$ osztható $n!\cdot(n+1)!\cdot\dots\cdot(n+k-1)!$-sal.

2. A $\frac{2\cdot(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$ számnak (és az általánosabb $\frac{1!\cdot2!\cdot\dots\cdot(k-1)!\cdot(kn)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot\dots\cdot(n+k-1)!}$-nak) vannak kombinatorikus jelentétesei is. Ezzel kapcsolatban lásd az **N. 163.** feladatot.