A szinusztételt alkalmazva a bizonyítandó állítás:

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1,$$

azaz

$$-1<\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}<1. \tag{1}$$

Adjunk mindkét oldalhoz 3-at mindegyik egyenlőtlenségben:

$$2<\frac{a+c-b}{a}+\frac{a+b-c}{b}+\frac{b+c-a}{c}<4.$$

Vezessük be az $a+b+c=2s$ jelölést. 2-vel osztva:

$$1<\frac{s-b}{a}+\frac{s-c}{b}+\frac{s-a}{c}<2.$$

Jelöljük a háromszög beírt köréhez húzható érintő szakaszokat az *ábra* szerint. Ekkor $x+y+z=s$, $a=x+y$, $b=y+z$ és $c=z+x$. A bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul:

$$1<\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}<2. \tag{2}$$

A törtek eltávolítása és némi számolás után (2) mindkét egyenlőtlensége nyilvánvalóan teljesül. Mivel átalakításaink megfordíthatók, a feladat állítását igazoltuk.

Mizda Roland (Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimn. 12. o. t.)

Megjegyzés. Már az (1) egyenlőtlenségek helyessége is közvetlenül megmutatható. Tegyük fel, hogy

$$a\le b\le c. \tag{3}$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $|c-b|<a$, $|a-c|<b$ és $|b-a|<c$, tehát az (1)-ben szereplő törtek 1-nél kisebb abszolútértékűek. (3) miatt $\dfrac{a-c}{b}$ negatív, de legalább akkora abszolútértékű, mint a pozitív $\dfrac{b-a}{c}$, ezért összegüknek $\dfrac{c-b}{a}$-val vett összege teljesíti (1)-et.

A teljesség érdekében végig kell vizsgálni az a, b, c nagyság szerinti felírásának (3)-hoz hasonló minden változatát.