I. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladat feltétele pontosan a derékszögű háromszögekre igaz. Legyen először az ABC háromszög hegyesszögű. Az *ábrán* O a körülírt kör középpontja, D pedig a kör C-vel átellenes pontja. Ekkor $8R^2 = 2(2R)^2 = a^2 + BD^2 + b^2 + AD^2 < a^2 + b^2 + c^2$, hiszen most a $BDA\sphericalangle$ tompaszög, és így $AD^2 + BD^2 < c^2$.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor $2R > c$ miatt $4R^2 > c^2$ és $8R^2 > 2c^2 > a^2 + b^2 + c^2$, ahol c a legnagyobb oldalt jelöli.

Derékszögű háromszög esetén $2R = c$, ezért $8R^2 = 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, ahol c az átfogó. Tehát $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ pontosan akkor teljesül, ha a háromszög derékszögű.

Kunszenti-Kovács Dávid (Oslo, Lycée Français René Cassin, 7. o.t.)

II. megoldás. Legyen O a vonatkoztatási pont, és $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Ekkor $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$, és pl. $|\mathbf{b} - \mathbf{c}| = a$ alapján: $a^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = 2R^2 - 2\mathbf{bc}$, amiből $2\mathbf{bc} = 2R^2 - a^2$. Hasonlóan kapjuk, hogy $2\mathbf{ab} = 2R^2 - c^2$, $2\mathbf{ca} = 2R^2 - b^2$. Legyen $\mathbf{m}$ a magasságpont helyvektora. Ismeretes, hogy $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, ezért $\mathbf{m}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = 3R^2 + 6R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, amiből $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - \mathbf{m}$. A feladat feltételének azok és csak azok a háromszögek felelnek meg, amelyekre $9R^2 - \mathbf{m}^2 = 8R^2$, azaz $R^2 = \mathbf{m}^2$, tehát $|R| = |\mathbf{m}|$. Ez pontosan a derékszögű háromszögekre teljesül.