$n=1$-re az állítás triviálisan teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 2$ és $\pi \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$; (nem megy az általánosság rovására). Először lássuk be a következőt (ami éppen a feladat állítása $n=2$ esetén):

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \leq 2\cdot\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}. \tag{1}$$

Alkalmazva az ismert azonosságot:

$$2\cdot\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \leq 2\cdot\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}.$$

Ez viszont nyilván teljesül, hiszen

$$\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \geq 0, \qquad \text{mert} \qquad 0 \leq \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{és} \qquad \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \leq 1.$$

Ezzel (1)-et bebizonyítottuk.

Legyen $\alpha_1' = \alpha_2' = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ és $\alpha_i' = \alpha_i$ ($i > 2$). Ekkor $\dfrac{\pi}{2} \geq \alpha_1' \geq \alpha_2' \geq \alpha_3' \geq \cdots \geq \alpha_n' \geq 0$. Ezek után (1)-et alkalmazva:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=3}^{n}\cos\alpha_i + \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right) \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=3}^{n}\cos\alpha_i + 2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\sum\cos\alpha_i'\right) \leq \cos\left(\frac{1}{n}\sum\alpha_i'\right).$$

Az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert a koszinusz-függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-ben konkáv és $\alpha_i' \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.