I. megoldás. Ha $x,\ y\geq 1$, akkor $x\circ y\geq 1$; tehát $x\circ y$ valóban művelet az 1-nél nem kisebb számokon. Ez a művelet kommutatív, így $x\circ(y\circ z)=(y\circ z)\circ x=(z\circ y)\circ x$.

Belátjuk, hogy az $(x\circ y)\circ z$ kifejezés x-re, y-ra, z-re nézve szimmetrikus.

$(x\circ y)\circ z=$

$$=\left(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right)z+\sqrt{\left(\left(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right)^2-1\right)(z^2-1)}=$$

$$=xyz+z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}+$$
$$+\sqrt{\left(x^2y^2+x^2y^2-x^2-y^2+2xy\sqrt{(x^2-1)}\sqrt{y^2-1}\right)(z^2-1)}=$$

$$=xyz+z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}+$$
$$+\sqrt{\left(x^2\left(y^2-1\right)+y^2\left(x^2-1\right)+2xy\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right)(z^2-1)}=$$

$$=xyz+z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}+\sqrt{\left(x\sqrt{y^2-1}+y\sqrt{x^2-1}\right)^2(z^2-1)}=$$
$$=xyz+z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}+\left|x\sqrt{y^2-1}\sqrt{z^2-1}+y\sqrt{x^2-1}\sqrt{z^2-1}\right|$$

$x\geq 1$, $y\geq 1$ miatt az abszolútértékjelek között szereplő összeg nem negatív.

Innen:

$$(x\circ y)\circ z=xyz+z\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}+y\sqrt{x^2-1}\sqrt{z^2-1}+x\sqrt{y^2-1}\cdot\sqrt{z^2-1},$$

és ez valóban szimmetrikus x-re, y-ra, z-re nézve. Ebből adódik, hogy $(x\circ y)\circ z=(z\circ y)\circ x$. Mivel $x\circ(y\circ z)=(z\circ y)\circ x$, azért $(x\circ y)\circ z)=x\circ(y\circ z)$. Tehát a művelet asszociatív.

Less Áron (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A $\circ$ művelet pontosan akkor asszociatív, ha bármilyen x, y, z 1-nél nem kisebb számokra $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.

A feladatot hiperbolikus függvények segítségével fogjuk megoldani.

($\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$)

Ismert azonosságok: $x\geq 0$ esetén

$$\operatorname{sh}x=\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1},\qquad \operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

Így

$$\operatorname{ch}u\circ\operatorname{ch}v=\operatorname{ch}u\operatorname{ch}v+\sqrt{\operatorname{ch}^2u-1}\sqrt{\operatorname{ch}^2v-1}=\operatorname{ch}u\operatorname{ch}v+\operatorname{sh}u\operatorname{sh}v=\operatorname{ch}(u+v),$$

ha $u\geq 0$ és $v\geq 0$.

A $\operatorname{ch}x$ függvény értékkészlete a nemnegatív valós számokon az $[1,\ \infty)$ intervallum.

Így $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$ esetén léteznek olyan $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$ valós számok, hogy $x=\operatorname{ch}a$, $y=\operatorname{ch}b$, $z=\operatorname{ch}c$. Ekkor

$$(x\circ y)\circ z=(\operatorname{ch}a\circ\operatorname{ch}b)\circ\operatorname{ch}c=\operatorname{ch}(a+b)\circ\operatorname{ch}c=\operatorname{ch}(a+b+c),$$
$$x\circ(y\circ z)=\operatorname{ch}a\circ(\operatorname{ch}b\circ\operatorname{ch}c)=\operatorname{ch}a\circ\operatorname{ch}(b+c)=\operatorname{ch}(a+b+c).$$

Tehát $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján