Először azt mutatjuk meg, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x < \operatorname{tg} x$.

Ábrázoljuk az x szöget az egységsugarú körben.

Jelöljük a kör középpontját O-val, sugarát OB-vel, ekkor $BOC\sphericalangle = x$ és $OBC\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$. A BC szakasz hossza $\operatorname{tg} x$, így az OBC háromszög területe $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Az OC félegyenes a kört D-ben metszi. A BOD köcikk területe $\frac{x}{2}$. Mivel az OBC háromszög tartalmazza a BOD körcikket, $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, azaz $x < \operatorname{tg} x$. Így

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} > x, \frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x}, \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos x} > \frac{1}{x} + \frac{x}{\sin x}.$$

Itt $\frac{1}{x}$ és $\frac{x}{\sin x}$ pozitív számok, így alkalmazhatjuk rájuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{x}{\sin x}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}.$$

Ebből $\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos x} > \frac{1}{x} + \frac{x}{\sin x} \geq \frac{2}{\sqrt{\sin x}}$.

Benedek Csaba (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha a BD ív hosszát hasonlítjuk össze a D-ből OB-re bocsátott merőleges szakasz hosszával, akkor a $\sin x < x$ egyenlőtlenséget kapjuk.