I. megoldás. Válasszuk a háromszög csúcsainak jelölését úgy, hogy az A-nál lévő szög legyen $60°$-os, a B-nél lévő pedig $15°$-os. Ekkor a C-nél lévő szög $180° - (60° + 15°) = 105°$. Vegyük fel az AB oldalon a D pontot úgy, hogy $ACD\sphericalangle = 60°$ legyen, majd a BC oldalon az E pontot úgy, hogy $CDE\sphericalangle = 90°$ legyen, végül az AB oldalon az F pontot úgy, hogy $DEF\sphericalangle = 120°$ legyen (*1. ábra*).

Ekkor egyszerű számolással meghatározhatjuk az ACD, CDE, DEF és EFB háromszögek szögeit:

$$ADC\sphericalangle = 180° - (DAC\sphericalangle + ACD\sphericalangle) = 60°; DCE\sphericalangle = ACB\sphericalangle - ACD\sphericalangle = 45°, DEC\sphericalangle = 180° - (CDE\sphericalangle + DCE\sphericalangle) = 45°; EDF\sphericalangle$$

Tehát az ACD háromszög szabályos, a CDE, DEF és EFB háromszögek pedig egyenlő szárúak. Ha AC hosszát x-szel jelöljük, akkor $AC = AD = CD = DE = EF = FB = x$. Legyen AD felezőpontja M, DF felezőpontja pedig N. Mivel az ADC háromszög szabályos, ezért CM merőleges AD-re, $AM = MD = \frac{x}{2}$ és $CM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$. Az EN szakasz is merőleges DF-re, ezért a CMD és a DNE háromszögek megfelelő szögei megegyeznek. Mivel $CD = DE$ is teljesül, ezért a két háromszög egybevágó, vagyis $DN = CM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$, és mivel N a DF felezőpontja, ezért $FN = DN = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$. Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$1 = AB = AD + DN + NF + FB = x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + x = \left(2 + \sqrt{3}\right) x.$$

Vagyis $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. A BC oldal hosszát a BCM derékszögű háromszögből határozhatjuk meg Pitagorasz tételét felhasználva:

$$BC^2 = CM^2 + MB^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - x + 1 = 6 - 3\sqrt{3}.$$

Tehát az ABC háromszög másik két oldalának hossza $2 - \sqrt{3}$ és $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$.

Pótó Júlia (Budapest, Veres P. Gimn., 9. évf.)

II. Megoldás. Feltehetjük, hogy az ABC háromszögben az A-nál lévő szög $60°$-os, a B-nél lévő pedig $15°$-os. A háromszög C-nél lévő szöge tompaszög, ezért a B-ből induló magasság T talppontja az AC oldal C-n túli meghosszabbításán van (*2. ábra*). Legyen $AC = x$ és $CT = y$.

Mivel $BAT\sphericalangle = 60°$ és $ATB\sphericalangle = 90°$, ezért $ABT\sphericalangle = 30°$, a BAT háromszöget a BT egyenesre tükrözve a tükörkép és az eredeti háromszög együtt egy szabályos háromszöget alkot, melynek oldalhossza $AB = 1$. Így $AT = \frac{1}{2}$ és $BT = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A BC egyenes felezi az ABT szöget, mert $CBT\sphericalangle = ABT\sphericalangle - ABC\sphericalangle = 30° - 15° = 15° = ABC\sphericalangle$. A szögfelezőtételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$(1) \qquad \frac{TC}{CA} = \frac{BT}{BA}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tudjuk, hogy $AT = AC + CT = \frac{1}{2}$, vagyis

$$(2) \qquad x + y = \frac{1}{2}.$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva

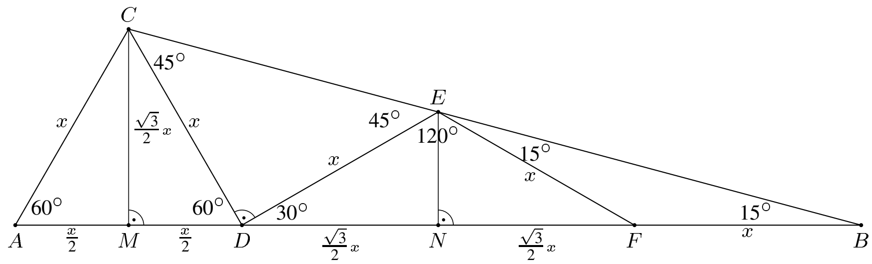
$$x = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$$

adódik. A BC oldal hosszát ezután a BCT háromszögből, Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk:

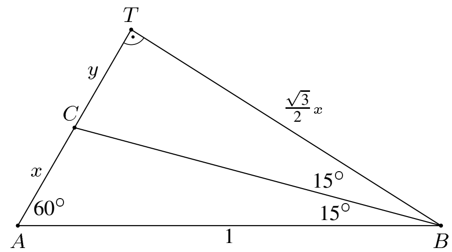
$$BC^2 = CT^2 + TB^2 = \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 6 - 3\sqrt{3}.$$

Tehát az ABC háromszög másik két oldalának hossza $2 - \sqrt{3}$ és $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 9. évf.)



C
E
A
M
D
N
F
B
45°
45°
120°
15°
15°
60°
60°
30°
x
x
x
x
x
$\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$\frac{x}{2}$
$\frac{x}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$\frac{\sqrt{3}}{2}x$



T
C
A
B
y
x
$\frac{\sqrt{3}}{2}x$
60°
15°
15°
1