Először azt vizsgáljuk meg, hogyan helyezkednek el egymáshoz képest a kocka kitérő élhármasai. Mivel az élek szerepe szimmetrikus, ezért az első élt tetszés szerint választhatjuk. Jelöljük a kiválasztott élt a-val (*1. ábra*). A kocka maradék 11 éle közül 4 metszi a-t, 3 pedig párhuzamos vele. Ezért a második élt az ábrán b, c, d, e-vel jelölt élek közül kell választanunk. Ez a 4 él a-hoz képest ismét teljesen szimmetrikusan helyezkedik el, ezért feltehetjük, hogy a második kiválasztott él b. Ekkor viszont a harmadik él már csak c lehet. Ezzel beláttuk, hogy elegendő egyetlen élhármas esetén megkeresnünk a súlypontok halmazát, mert a három kitérő él egymáshoz képest mindig ugyanúgy helyezkedik el, a háromszögek súlypontjainak halmaza mindig egybevágó azzal a halmazzal, amit a 2. ábrán látható e_1, e_2 és e_3 éleken lévő $E_1E_2E_3$ háromszögek súlypontjai alkotnak.

Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a tengelyek párhuzamosak legyenek a kocka éleivel, az egység minden tengelyen legyen a kocka élhosszának egyhatoda, a kocka középpontja pedig legyen a $(3,\ 3,\ 3)$ pont (*2. ábra*). Jelöljük az E_i pont koordinátáit $({e_i}^x,\ {e_i}^y,\ e_i^z)$-vel $(i=1,2,3)$. Ekkor a koordináta-rendszer felvételéből következik, hogy ${e_1}^y={e_1}^z=0$; és ${e_2}^x=0$ és ${e_2}^y=6$; ${e_3}^x={e_3}^z=6$; továbbá ${e_1}^x$, ${e_2}^z$ és ${e_3}^y$ a $[0;6]$ intervallumból kerül ki. Ha az $E_1E_2E_3$ háromszög súlypontjának koordinátáit s^x, s^y és s^z jelöli, akkor ismert, hogy

$$s^x=\frac{{e_1}^x+{e_2}^x+{e_3}^x}{3},\qquad s^y=\frac{{e_1}^y+{e_2}^y+{e_3}^y}{3},\qquad s^z=\frac{{e_1}^z+{e_2}^z+{e_3}^z}{3},$$

azaz

$$s^x=2+\frac{{e_1}^x}{3},\qquad s^y=2+\frac{{e_3}^y}{3}\qquad \text{és}\qquad s^z=2+\frac{{e_2}^2}{3}.$$

Ezért $2\le s^x,\ s^y,\ s^z\le 4$, vagyis a súlypont mindig benne van abban a 2 egység élű K kockában, melynek középpontja egybeesik az eredeti kocka középpontjával, élei pedig párhuzamosak annak éleivel. Ha $P\,(p^x,\ p^y,\ p^z)$ a K belsejében vagy annak valamelyik lapján van, akkor $2\le p^x,\ p^y,\ p^z\le 4$, ezért az ${E_1}^p\,(3p^x-6;0;0)$, ${E_2}^p\,(0;6;3p^z-6)$ és ${E_3}^p\,(6;3p^y-6;6)$ pontok által meghatározott háromszög súlypontja éppen P, továbbá ${E_i}^P$ rajta van az eredeti kocka e_i élén.

Ezzel megmutattuk, hogy a keresett ponthalmaz egy kocka, melyet úgy kapunk, hogy az eredeti kockát a középpontjából egyharmadára kicsinyítjük.

Papp Dávid (Budapest, Szt. István Gimn., 10. évf.)