

I. megoldás. Írjuk a feltételezett $\frac{7}{17} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ összefüggést $7ab = 17(a + b)$ alakba. Jelölje az a és b legnagyobb közös osztóját d , ekkor $a = dA$, $b = dB$, ahol A és B egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Egyenletünk ekkor (a nemnulla d -vel való leosztás után) a $7dAB = 17(A + B)$ alakot ölti. Mivel A és B relatív prím, azért A -nak és $(A + B)$ -nek sincs 1-nél nagyobb közös osztója, ugyanígy B -nek és $(A + B)$ -nek sem. Így AB és $A + B$ is relatív prím; ezért AB csak úgy lehet osztója a $7dAB = 17(A + B)$ szorzatnak, ha osztója 17-nek. Ez $AB = 1$ vagy $AB = 17$ esetén teljesül. Az előbbi esetben $A = B = 1$, az utóbbiban például $A = 1$, $B = 17$, így $7d = 34$, ill. $7d = 18$. Egyik esetben sem kapunk d -re egész értéket, tehát a kívánt felírása $\frac{7}{17}$ -nek nem lehetséges.

II. megoldás. A $7ab = 17(a + b)$ egyenlet 7-tel szorozva, átrendezve, majd mindkét oldalhoz 17^2 -t adva

$$17^2 = (7a - 17)(7b - 17).$$

Mivel 17 prím, ez a $\{(7a - 17), (7b - 17)\}$ egész számpárra a következő lehetőségeket engedi csak meg (kettejük sorrendjének felcserélésétől eltekintve): $\{-17^2, -1\}$, $\{-17, -17\}$, $\{17^2, 1\}$, $\{17, 17\}$. Az ezeknek rendre megfelelő értékek a -ra: $\frac{17 - 17^2}{7}$, 0 , $\frac{17 + 17^2}{7}$, $\frac{17 + 17}{7}$, amelyek egyike sem pozitív egész.

Pallos Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)