Elég ha az x polinomot felírjuk n darab polinom n-edik hatványának előjeles összegeként, mert ha az f_1, f_2, $\dots$, f_n polinomokra

$$\pm(f_1(x))^n \pm (f_2(x))^n \pm \cdots \pm (f_n(x))^n = x,$$

akkor x helyére egy tetszőleges $g(x)$ polinomot helyettesítve

$$(f_1(g(x)))^n + (f_2(g(x)))^n + \cdots + (f_n(g(x)))^n = g(x).$$

Definiáljuk a következő polinomsorozatot:

$$h_0(x) = x^n, \qquad h_{k+1}(x) = h_k(x) - h_k(x-1).$$

Ezeknek a polinomoknak két tulajdonságára lesz szükségünk:

(a) Tetszőleges k nemnegatív egészre

$$h_k(x) = \binom{k}{0}x^n - \binom{k}{1}(x-1)^n + \binom{k}{2}(x-2)^n - + \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}(x-k)^n =$$
$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x-j)^n;$$

(b) $0 \le k \le n$ eseten h_k foka $n-k$ és főegyütthatója $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

Mindkét állítást indukcióval bizonyíthatjuk. A $k=0$ esetben mindkettő triviális.

Ha valamely k-ra (a) igaz, akkor igaz $k+1$-re is, mert

$$h_{k+1}(x) = h_k(x) - h_k(x-1) =$$
$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x-j)^n - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x-j-1)^n =$$
$$= \binom{k}{0}x^n + \sum_{j=1}^{k}(-1)\left(\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right)(x-j)^n - (-1)^k\binom{k}{k}(x-k-1)^n =$$
$$= \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}(x-j)^n.$$

Ha a (b) állítás teljesül valamely $0 \le k < n$-re, azaz

$$h_k(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} + a_{n-k-1}x^{n-k-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

akkor

$$h_{k+1}(x) = h_k(x) - h_k(x-1) = n(n-1)\dots(n-k+1)\left(x^{n-k} - (x-1)^{n-k}\right) +$$
$$+a_{n-k-1}\left(x^{n-k-1} - (x-1)^{n-k-1}\right) + \dots a_1(x-(x-1)) + (a_0 - a_0).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy x^{n-k} kiesik, és x^{n-k-1} együthatója $n(n-1)\dots(n-k)$.

A $k=n-1$ esetben speciális esetként azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}(x-j)^n$$

egy lineáris polinom, felírható $Ax+B$ alakban, ahol $A \neq 0$. Legyen

$$f_j(x) = \sqrt[n]{\binom{n-1}{j}}\left(\frac{x-B}{A} - j\right);$$

ezzel a választással

$$(f_0(x))^n - (f_1(x))^n + - \cdots + (-1)^{n-1}(f_{n-1}(x))^n =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-a)^j\binom{n-1}{j}\left(\frac{x-B}{A} - j\right)^n = A\frac{x-B}{A} + B = x.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.