Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $a_9 \leq 100$.

Legyen S azoknak a legfeljebb öttagú összegeknek a halmaza, amelyek az $a_1, a_2, \ldots, a_8$ számokból készíthetők, és nem kisebbek a_4-nél. A legfeljebb öttagú összegek száma $\binom{8}{1} + \cdots + \binom{8}{5} = 218$, ezek közül azok lehetnek kisebbek a_4-nél, amelyekben csak a_1, a_2 vagy a_3 szerepel, összesen 7 darab. Tehát $|S| \geq 211$.

A legnagyobb összeg $a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 < a_4+4a_9$, ezért mindegyik összeg az $I = [a_4; a_4+4a_9-1]$ intervallumba esik. Az $|S| > 2a_9$ egyenlőtlenség alapján S-nek létezik három olyan eleme, amelyek a_9-cel osztva ugyanazt a maradékot adják. Mivel azonban I bármely két elemének különbsége kisebb $4a_9$-nél, a három elem közül kettő különbsége pontosan a_9. Ez azonban ellentmondás, mert a kisebbik összeghez a_9-et adva a nagyobbikat kapjuk.

Kun Gábor (Budapest, Piarista Gimn., III. o.)

Megjegyzések. 1. Egy kis számolással ellenőrizhető, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_9$ számokból legalább 376 darab olyan összeg készíthető, amely biztosan $a_1+a_4+a_5$ és $a_1+a_4+a_5+a_7+a_8+a_9$ közé esik. Ebből azonnal következik, hogy $a_7+a_8+a_9 \geq 375$ és $a_9 \geq 126$. Ez az eredmény még mindig messze van a lehetséges legjobbtól.

2. Többféle módszerrel, például az előző pontbeli ötlet általánosításával igazolható, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_9$ számokból készíthető összegek mind különbözők, akkor $a_n > c\frac{2^n}{\sqrt{n}}$. Az is könnyen látható, hogy a 2-hatványok sorozatára teljesül a feltétel.

Erdős Pál azt sejtette, hogy megfelelő pozitív c konstanssal $a_n > c2^n$. Ennek bizonyításáért vagy megcáfolásáért 300 dollárt ajánlott fel. A probléma jelenleg még megoldásra vár.