Jelölje $kn$ 5-tel való osztási maradékát $a_k$, és legyen $kn = 5b_k + a_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

$x^{kn} - a^{a_k}$ osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$-gyel, mivel

$$x^{kn} - x^{a_k} = a^{a_k} \cdot (x^{5b_k} - 1) = x^{a_k} \cdot (x^5 - 1) \cdot (x^{5(b_k-1)}) + x^5(b_k - 2) + \cdots + x^{5\cdot 0}) =$$
$$= x^{a_k} \cdot (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \left(x^{5(b_k-1)} + x^{5(b_k-2)} + \cdots + x^{5\cdot 0}\right).$$

Ennek alapján

$$x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1 - x^{a_4} - x^{a_3} - x^{a_2} - x^{a_1} - 1$$

osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$-gyel.

Ha $n$ nem osztható 5-tel, akkor az $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ számok valamilyen sorrendben megegyeznek az 1, 2, 3, 4 számokkal. Így $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$-gyel, s ez a kívánt oszthatósággal ekvivalens.

Ha $n$ osztható 5-tel, akkor az $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ számok mindegyike 0, így az $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n - 4$ polinom osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$-gyel. Ezért az $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$ polinom nem osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$-gyel.