Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a k_A és k_B körök középpontjait O_A-val, illetve O_B-vel, sugaraikat pedig r_A-val, illetve r_B-vel. Legyen az AB egyenesnek a k_A és k_B körökkel való A-tól és B-től különböző metszéspontja A', illetve B'.

Mivel az AC és a BC egyenesek érintik a megfelelő köröket és $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 60^\circ$, ezért az AA' és a BB' húrokhoz tartozó kisebbik érintőszárú kerületi szögek 60°-osak, így ezek a húrok a megfelelő középpontból $2\cdot 60^\circ = 120^\circ$-os szögben látszanak, azaz $AO_AA'\sphericalangle = BO_BB'\sphericalangle = 120^\circ$. A *2. ábráról* leolvasható annak a bizonyítása, hogy az r sugarú k kör h húrja pontosan akkor látszik k középpontjából 120°-os szögben, ha h érinti a k-val koncentrikus $\frac{r}{2}$ sugarú kört. Vagyis az AB egyenes érinti az O_A középpontú $\frac{r_A}{2}$ sugarú kört is (mert AA' az O_A-ból 120°-os szögben látszik), és az O_B középpontú $\frac{r_B}{2}$ sugarú kört is (mert $BO_BB'\sphericalangle = 120^\circ$). Tehát az AB egyenes e két kör (egyik) közös érintője.

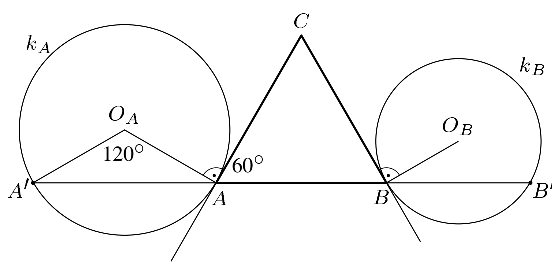
Ezek alapján a szerkesztés menete: Megszerkesztjük a k_A-val, illetve k_B-vel koncentrikus, feleakkora sugarú köröket, majd a két kis kör egyik közös érintőjét. Ezután megrajzoljuk a k_A és k_B köröknek a közös érintővel való metszéspontjaikban vett érintőit. E négy érintő közül kettő-kettő párhuzamos lesz. A különböző körökhöz tartozó nem párhuzamos érintők metszéspontjai a szerkesztendő szabályos háromszögek C csúcsait adják, míg a k_A, illetve k_B körön lévő érintési pontok az A, illetve B csúcsokat.

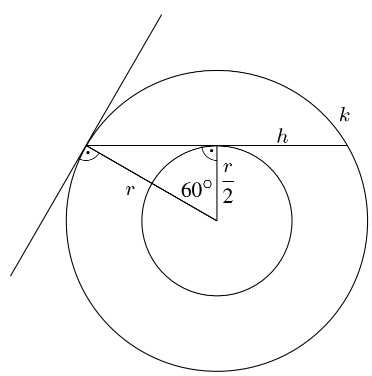
Az így szerkesztett ABC háromszögek eleget tesznek a feladat feltételeinek, mert $A \in k_A$ és $B \in k_B$; az A-ban k_A-hoz húzott érintő, illetve a B-ben k_B-hez húzott érintő az AB egyenessel 60°-os szöget zár be, ezért az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 60^\circ$, vagyis a háromszög szabályos.

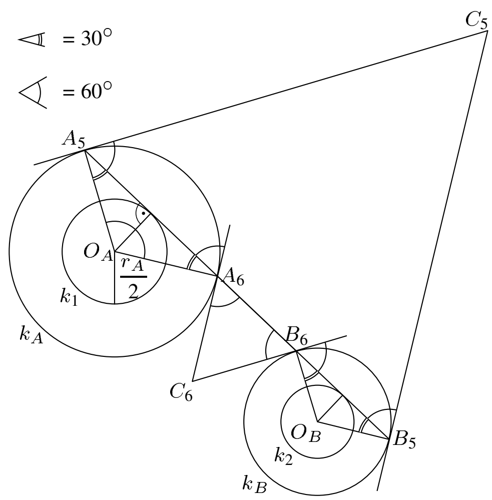
Mivel a k_A és k_B körök egymáson kívül helyezkednek el, ezért a velük koncentrikus, felelakkora sugarú köröknek összesen négy közös érintőjük van. Minden egyes külső (*3. ábra*), illetve belső (*4. ábra*) közös érintőhöz két-két megoldás tartozik, ezért a feladatnak minden esetben nyolc megoldása van.

Megjegyzés. A nyolc darab háromszög C jelű csúcsainak mindegyikére igaz, hogy belőle a k_A és a k_B körhöz egyenlő hosszúságú érintők húzhatók. Ezért a nyolc pont mindegyike rajta van a k_A és k_B körök hatványvonalán, vagyis a nyolc pont egy egyenesen van.

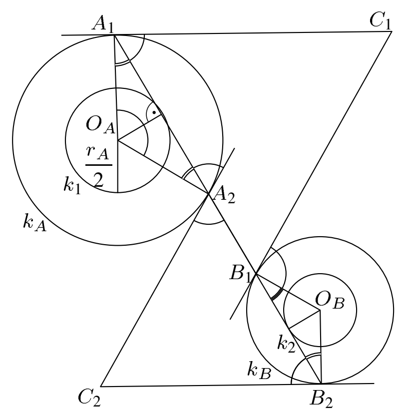
Barát Anna (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., II. o. t.)







= 30°
= 60°
C_5
A_5
O_A
$\frac{r_A}{2}$
A_6
k_1
k_A
B_6
C_6
O_B
B_5
k_2
k_B



A_1
C_1
O_A
$\frac{r_A}{2}$
k_1
A_2
k_A
B_1
O_B
k_2
k_B
C_2
B_2