a) Legyen A az $1, 2, \ldots, k$ számok legkisebb közös többszöröse, és legyen $a_i = i \cdot A$ minden i-re. Ekkor $i \neq j$ esetén $a_i - a_j = (i-j)A \mid A^2 \mid a_i^{1997}$, tehát ez a konstrukció megfelelő.

b) Az állítás $k = 1$ esetén az $a_1 = 1$ ellenpélda miatt nem igaz, de $k \geq 2$ esetén igaz, ezt bizonyítjuk be. Legyen először $k \geq 4$, és tekintsünk egy tetszőleges, $\dfrac{k}{2}$-nél nem nagyobb p prímet. Két különböző a_i és a_j nem adhatja ugyanazt a 0-tól különböző maradékot p-vel osztva, mert $a_i \equiv a_j \pmod p$ esetén $p \mid a_i - a_j \mid a_i^{1997}$. Ebből következik, hogy a p-vel nem osztható a_i-k száma legfeljebb $p-1$, és a p-vel osztható a_i-k száma legalább $k - p + 1 \geq \left[\dfrac{k+1}{2}\right]$.

Tekintsük a $B = a_1 a_2 \ldots a_k$ szorzatot. Az előbbiek szerint ha $p < \dfrac{k}{2}$ prím, akkor B osztható $p^{\left[\frac{(k+1)}{2}\right]}$-vel, ezért

$$a_k > B^{\frac{1}{k}} \geq \left(\prod_{p<\frac{k}{2}} p^{\left[\frac{(k+1)}{2}\right]} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \left(\prod_{p<\frac{k}{2}} p \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De ismeretes (lásd megjegyzésünket), hogy létezik olyan pozitív c_0 konstans, amelyre tetszőleges $x \geq 2$ esetén $\prod_{p\leq x} p > 2^{c_0 x}$, ezért $a_k > 2^{\frac{1}{4}c_0 k}$.

Ha $k = 2$ vagy $k = 3$, akkor $a_k \geq 2 > 2^{\frac{1}{4}k}$. A c számnak ezért választhatjuk $\dfrac{1}{4}c_0$ és $\dfrac{1}{4}$ közül a kisebbet.

Megjegyzés. A prímszámtétel egyik formája azt mondja ki, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{p\leq x} \log p}{x} = 1,$$

vagy másképpen, tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra, ha x elég nagy,

$$e^{(1-\varepsilon)x} < \prod_{p\leq x} p < e^{(1+\varepsilon)x}.$$

Ennél valamivel gyengébb alsó és felső becslést be lehet bizonyítani viszonylag egyszerű, elemi úton. *Szalay Mihály:* Számelmélet (Tankönyvkiadó, 1991.) c. könyvének 143–146. oldalain megtalálható többek között annak bizonyítása, hogy $n \geq 5$ esetén

$$\prod_{n<p\leq 2n} p > \frac{2^{2n}}{(2n)^{\sqrt{n}}} \cdot 4^{-\frac{2n}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}2n}}{(2n)^{\sqrt{2n}}}.$$

Ebből következik, hogy $\prod_{p\leq x} p > 2^{(\frac{2}{3}-\varepsilon)x}$, ha x elég nagy.

Az idézett könyv 140. oldalán megtalálható 3.2. tétel szerint $\prod_{p\leq x} p < 4^x$. Ebből nem nehéz bebizonyítani, hogy az első megoldásban szereplő A szám nem nagyobb, mint $4^{(1+\varepsilon)k}$, és így a b) állítás a konstanstól eltekintve éles.