A feladat megoldásához néhány segédtételt bocsátunk előre.

I. *Egy téglalapban elhelyezett bármely négyzet oldala legfeljebb akkora, mint a téglalap rövidebbik oldala.*

Húzzunk párhuzamost a négyzet csúcsain keresztül a téglalap megfelelő oldalaival úgy, hogy azok ne messék a négyzet belsejét. A négy egyenes olyan négyzetet határoz meg, amely a kiindulási négyzetet tartalmazza, és oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival.

II. *Egy derékszögű háromszögbe írt négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a befogókra illeszkedik, egy csúcsa pedig az átfogón van.*

Legyen $KLMN$ egy, az ABC derékszögű háromszögben lévő négyzet. Mozgassuk el a négyzetet úgy, hogy pl. K az AC, L pedig a BC oldalon legyen, és az új négyzet is ABC-ben feküdjön (*1. ábra*). Mivel $CKOL$ húrnégyszög, $OCK\sphericalangle = OLK\sphericalangle = 45°$, vagyis a négyzet O középpontja a derékszög felezőjére esik. Messe ez a szögfelező az MN oldalt D-ben. Elegendő megmutatni, hogy $\overline{CD} > \overline{KM}$. Látható, hogy C, K, D és M egy körön van, hiszen a KD szakasz C-ből is és M-ből is $45°$-os szögben látszik. A C, K, D és M pontokon átmenő kör O' középpontja a CD és KM húrok felezőmerőlegesének metszéspontja, ezért $O'FO\sphericalangle = 90°$, így $\overline{O'F} < \overline{O'O}$. A CD húr tehát közelebb van O'-höz, mint a KM, ezért valóban $\overline{CD} > \overline{KM}$.

III. *Ha egy egységnyi oldalú négyzetben elhelyezkedik egy a és egy b oldalú, közös belső pont nélküli négyzet, akkor $a + b \le 1$.*

Legyen e olyan egyenes, amelynek a két négyzet különböző félsíkjában van (*2. ábra*). Ha e az egységnégyzet valamelyik oldalával párhuzamos, akkor (**I**) szerint készen vagyunk. Egyébként e metszi az egységnégyzet valamennyi oldalegyenesét. Jelölje C_1 és C_2 az egységnégyzet két azon átellenes csúcsát, amelyek egyike az e-től legtávolabb lévő csúcs. (**II**) szerint a C_1EF, illetve a C_2GH derékszögű háromszögben elhelyezhető legnagyobb négyzet egyik átlója a C_1C_2 szakaszon van, így a két átlónak közös belső pontja nem lévén, hosszuk összege legfeljebb $\overline{C_1C_2}$, azaz $\sqrt{2}(a + b) \le \sqrt{2}$.

IV. *Egy téglalapban lévő, közös belső pont nélküli két négyzet oldalának összege legfeljebb akkora, mint a téglalap hosszabbik oldala.*

Az állítás közvetlenül adódik (**III**)-ból, ehhez a téglalapot olyan négyzetté egészítjük ki, amelynek oldala a téglalap hosszabbik oldalával egyenlő.

Nevezzük a továbbiakban az 1×2-es téglalap felezőjének azt az egyenest, amely őt 2 darab egységnégyzetre bontja; e két négyzetet hívjuk majd a téglalap felének.

V. *Ha az 1×2-es téglalapban lévő valamely négyzetnek létezik közös (határ)pontja a téglalap egységnyi hosszúságú oldalával, akkor ez a négyzet a téglalapnak az egyik (a közös pontot tartalmazó) felében van.*

Az (**I**) bizonyításában látott módon a szóban forgó négyzet olyan, a téglalapban fekvő négyzetbe foglalható, amelynek oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival, és egyik oldalegyenese a téglalap egyik egységhosszúságú oldalával közös. Nyilván ez a befoglaló négyzet a téglalap felében található.

A feladat kérdésére térve megmutatjuk, hogy a válasz igenlő. Toljuk el a téglalapban lévő három négyzetből álló ponthalmazt a $\overrightarrow{BA}$ irányában úgy, hogy valamelyik négyzetnek legyen határpontja AD-n (*3. ábra*). Ha több ilyen négyzet is lenne, jelöljük ki az egyiket; nevezzük bal szélsőnek. A másik két négyzet közül válasszuk ki azt, amelyiket $\overrightarrow{AB}$ irányában eltolva nem metszi a másikat (ha mindkettő ilyen, tekintsük az egyiket); toljuk el ezt a négyzetet úgy, hogy egyik határpontja BC-re essék. Az így kapott négyzetet hívjuk jobb szélsőnek, az első eltolás során kapott harmadikat pedig középsőnek. A négyzetek származtatásából látható, hogy a bal szélsőnek és a középsőnek nincs közös belső pontja, akárcsak a jobb szélsőnek és a középsőnek. A két szélső pedig azért nem metszi egymást, mert (**V**) szerint a téglalap két különböző felében vannak. A továbbiakban elegendő csak a két szélső és a középső négyzettel foglalkozni az eredetiek helyett; mivel nem metszik egymást, a középső elválasztható a két szélsőtől az e és az f egyenesekkel. Mivel a két szélső négyzet a téglalap „bal", illetve „jobb' felében fekszik, elérhető, hogy e-nek legyen közös pontja a téglalap bal felét alkotó zárt négyzetlemezzel, hasonlóan f-nek a zárt jobb féllel.

Ha e és f egyike párhuzamos AD-vel, akkor a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség következik (**IV**)-ből; ha pedig az egyik egyenes AB-vel párhuzamos, akkor egy négyzet egy $n \times 2$-es, kettő pedig egy $(1 - n) \times 2$-es téglalapba kerül, ezért (**I**) szerint a négyzetoldalak összege legfeljebb $n + 2(1 - n) = 2 - n \le 2$. Foglalkozzunk a továbbiakban azzal az esettel, amikor e és f a téglalap valamennyi oldalegyenesét metszve létrehoz két olyan derékszögű háromszöget, amelyekben egy-egy szélső négyzet helyezkedik el. Tekintsük például a 3. ábrán az A csúcsú, e által levágott derékszögű háromszöget. Mivel e-nek van közös pontja a téglalap bal felével, azért a DAB szög felezője a téglalapon metszi az e egyenest. Ez azt jelenti, hogy a derékszögű háromszögbe a (**II**) szerinti legnagyobb négyzetet beírva, az része marad a téglalapnak; helyettesítsük ővele a bal szélső négyzetet, és tegyünk ugyanígy a jobb szélső négyzettel is. Ezután két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az újonnan kapott szélső négyzetek a téglalap különböző vagy azonos oldalaira támaszkodnak-e (*4.* és *5. ábra*). Az első esetben a középső négyzet c oldala legfeljebb akkora, mint az XZY derékszögű háromszög XZ befogója (*4. ábra*). Az XTY derékszögű háromszög XY átfogója az XZY háromszögével közös, így – mivel $ZXY\sphericalangle \ge TXY\sphericalangle$ – $\overline{ZY} \ge \overline{TY}$, ezért

$$c \le c' = \overline{XZ} \le \overline{XT} = 2 - (a + b).$$

Utolsóként az *5. ábrán* látható konfigurációval foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy az a és b oldalú négyzetekhez nem tudunk $2 - a - b$ vagy annál nagyobb oldalú négyzetet illeszteni úgy, hogy az ne nyúljon ki a téglalapból. A *6. ábra* jelöléseivel elég azt megmutatni, hogy már a $c' = 2-(a+b)$ oldalú négyzet is csak úgy helyezhető el ezen a módon, hogy H csúcsának AB-től való távolsága nagyobb, mint 1; feltehető, hogy a, $b<1$.

Könnyen látható, hogy a c' oldalú négyzetbe berajzolt négy, egymással egybevágó derékszögű háromszög hasonló a PQS és a TRP derékszögű háromszögekhez; ezekben a két befogó arányát jelölje t, és használjuk az ábra többi jelölését is. A H pontnak az AB-től való távolsága:

$$d = c'\cdot\frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + \left(a-\frac{y}{t}\right) = \\ = c'\frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + (b-tx).$$

Figyelembe véve, hogy $a-\dfrac{y}{t} = b-tx$ (a P pont távolsága AB-től) és

$$x+y = c' = 2-(a+b),$$

kapjuk, hogy

$$x = \frac{t(b-a)+c'}{1+t^2},$$

ezért

$$\begin{aligned} d-1 &= \left(\frac{t^2+t}{1+t^2} - \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right)a + \left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right)b + 2\left(\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+t^2}\right) - 1 = \\ &= (t+1)\left[\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)a + \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)b + 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{t-1}{1+t^2}\right] = \\ &= (t+1)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}\right)(2-a-b) - \frac{t-1}{1+t^2}(1-a)\right] = \\ &= \frac{t+1}{1+t^2}\left[\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)(2-a-b) - (t-1)(1-a)\right] > 0, \end{aligned}$$

hiszen $\sqrt{1+t^2}-1>0$, $\sqrt{1+t^2}-1>t-1$ és $2-a-b>1-a$.

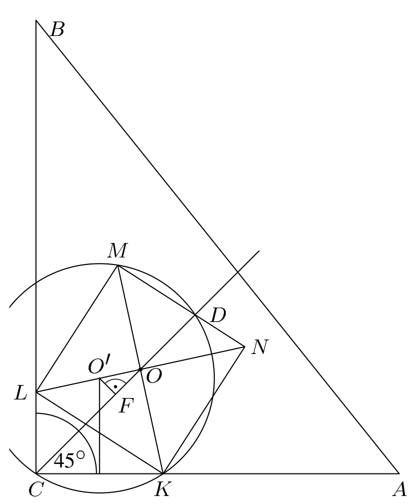
Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., III. o.t.) és *Juhász András* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozatainak felhasználásával

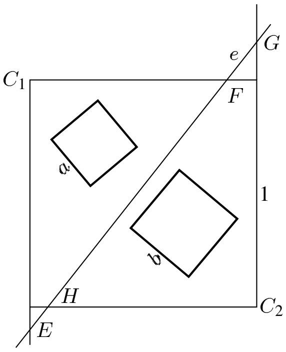
Megjegyzések. 1. A feladat rokonságot mutat az 1974. évi Kürschák József matematika verseny 2. feladatával, amely megtalálható Surányi János: *Matematikai versenytételek* III. rész c. művében.

2. Ha a téglalap $1\times d$ méretű és $d<2$, akkor $a+b+c\le d$ nem igaz.

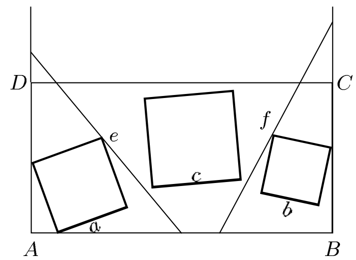
3. Megyeri Csaba (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., IV. o.t.) rámutat a feladat és Erdős Pál megoldatlan feladata közötti kapcsolatra: Ha a feladat állítása nem lenne igaz, akkor Erdős professzor úr megoldatlan problémája sem lenne igaz. Osszuk fel ugyanis az egységnégyzetet n^2 darab $\dfrac{1}{n}$ oldalú négyzetre. Két egymás mellettibe elhelyezzük azt a három négyzetet, amelyre $a+b+c>\dfrac{2}{n}$, a többi négyzetet meghagyjuk. Így összesen n^2+1 négyzetet helyeztünk el, az oldalhosszak összege:

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n^2+1} = a+b+c+\left(n^2-2\right)\cdot\frac{1}{n} > \frac{2}{n}+\left(n^2-2\right)\cdot\frac{1}{n} = n.$$

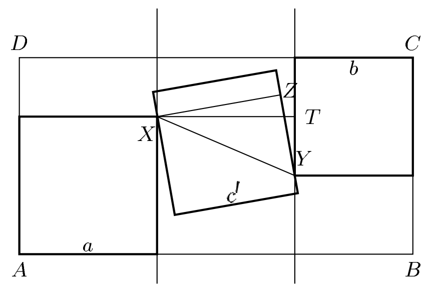




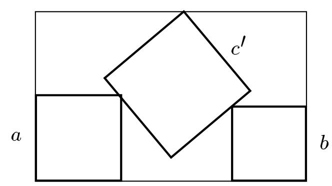
e
G
C_1
F
a
1
b
H
C_2
E



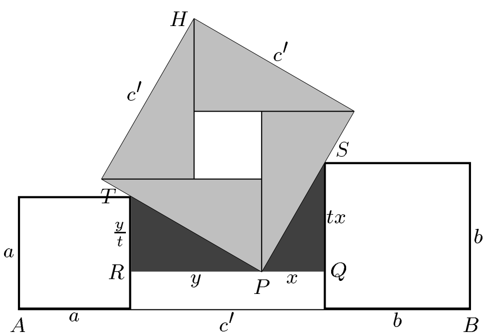
D
C
f
e
c
a
b
A
B



D
C
b
Z
T
X
Y
c′
a
A
B



c′
a
b



H
c′
c′
S
T
tx
$\frac{y}{t}$
a
b
R
Q
y
P
x
A
a
c′
b
B