$$\binom{2p-1}{p-1}-1=\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+p-1)-(p-1)!}{(p-1)!} \tag{1}$$

A feladat állításához elég bizonyítani, hogy (1) számlálója osztható p^2-tel, hiszen ha $(p-1)!\left(\binom{2p-1}{p-1}-1\right)$ osztható p^2-tel, akkor $\binom{2p-1}{p-1}-1$ is, mivel p^2 és $(p-1)!$ relatív prímek. Nézzük tehát (1) számlálójának első tagját:

$$(p+1)(p+2)\dots(p+p-1)=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(p+i)\dots(p+(p-i))=$$

$$=\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(2p^2+i(p-i)).$$

Mivel a p^2-tel való oszthatóságot vizsgáljuk, a fenti szorzatnak elég a p^2-tel vett maradékát tekinteni, ez pedig $\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i(p-i)=(p-1)!$.

Tehát $(p+1)(p+2)\dots(p+p-1)-(p-1)!$ valóban osztható p^2-tel.

Vaik Zsuzsanna (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján