Az $x = y = 0$ helyettesítéssel $f^2(0) \leq 0$ adódik, azaz $f(0) = 0$. Ezek után tételezzük fel, hogy nem igaz a feladat állítása, vagyis létezik olyan pozitív x_0, amelyre $f(x_0) > \frac{x_0^2}{2}$. Legyen $f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} \cdot q$; x_0 választása miatt $q > 1$.

A következőt fogjuk belátni:

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2^n}\right)^2 q^{2^n}, \qquad \text{ha} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Ez teljes indukcióval igazolható; $n = 0$ esetén állításunk triviális. Így már csak azt kell belátnunk, hogy ha $n = k$ esetén igaz az állítás, akkor $n = k + 1$ esetén is.

Az indukciós feltevés szerint: $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{2^k}\right)^2 \cdot q^{2^k}$. Négyzetre emelve

$$f^2\left(\frac{x_0}{2^k}\right) \geq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x_0}{2^k}\right)^4 q^{2^{k+1}}. \tag{2}$$

Másrészt az $f(x)f(y) \leq y^2 f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$ egyenlőtlenségbe $x = y = \frac{x_0}{2^k}$-t helyettesítve kapjuk:

$$f^2\left(\frac{x_0}{2^k}\right) \leq 2 \cdot \left(\frac{x_0}{2^k}\right)^2 f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right),$$

átrendezve:

$$f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_0}{2^k}\right)^{-2} \cdot f^2\left(\frac{x_0}{2^k}\right).$$

(2)-ből viszont így

$$f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2^k}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x_0}{2^k}\right)^4 q^{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)^2 q^{2^{k+1}}.$$

Így $n = k + 1$ esetén is fennáll az egyenlőtlenség, ezzel (1)-et igazoltuk.

Válasszuk az n_1, n_2 természetes számokat olyan nagyra, hogy teljesüljön: $\frac{x_0}{2^{n_1}} < 1$, $n_2 \geq n_1$, továbbá $2^{2^{n_2}\log_2 q - 2n_2 - 1} > 1997\frac{1}{x_0^2}$. Ezt megtehetjük, mert $\log_2 q > 0$, mivel $q > 1$. Ekkor $\frac{x_0}{2^{n_2}} \leq \frac{x_0}{2^{n_1}} < 1$ miatt $f\left(\frac{x_0}{2^{n_2}}\right) \leq 1997$. Tehát

$$1997 \geq f\left(\frac{x_0}{2^{n_2}}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_0}{2^{n_2}}\right)^2 q^{2^{n_2}} = x_0^2 \cdot 2^{2^{n_2}\log_2 q - 2n_2 - 1} > 1997.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis a feladat állítása igaz.