A tetszőleges $x_i < 1$-re fennálló

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1-(1-x_i)}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sqrt{1-x_i}$$

azonosság alkalmazásával a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala:

$$B = \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}\right) - \left(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_n}\right).$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1-x_1} \cdot \sqrt{1-x_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{1-x_n}}},$$

a számtani és négyzetes közepekre fennálló egyenlőtlenségből pedig:

$$-\left(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_n}\right) \geq$$
$$\geq -n\sqrt{\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\cdots+(1-x_n)}{n}} = -n\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Így

$$B \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}}} - n\sqrt{\frac{n-1}{n}} \geq$$
$$\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\cdots+(x-x_n)}{n}\right)^n}}} - n\sqrt{\frac{n-1}{n}} = n\sqrt{\frac{n}{n-1}} - n\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

A jobb oldalt, J-t a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséggel becsülve:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{n}J = \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ezért $J \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$, tehát

$$B \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq J.$$

Egyenlőség – a felhasznált egyenlőtlenségek miatt – pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$.

Szűcs Gábor (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)