A két golyóból álló rendszer tömegközéppontja – külső erő hiányában – mindvégig nyugalomban marad. A golyók között – mindaddig, míg össze nem ütköznek – csak a középpontjaik távolságának négyzetével fordítottan arányos erő hat. Ha az egyik golyó éppen x távol van a tömegközépponttól (vagyis a golyók távolsága $2x$), akkor erre a golyóra

$$F(x) = -f\frac{m^2}{(2x)^2}$$

($m = 1$ kg) erő hat. Ugyanekkora erővel vonzaná egy $M = \frac{1}{4}m$ tömegű, rögzített helyzetű pontszerű test is a tőle x távolságban levő m tömegű golyót. A továbbiakban úgy tekintjük a mozgást, mintha az ténylegesen egy ilyen, rögzített vonzócentrum hatására menne végbe.

Kezdetben $x = x_{\max} = 0{,}5$ m, az ütközés pillanatában pedig $x = x_{\min} = r$, ahol r az egyik ólomgolyó sugara, melyet a tömege (m) és a sűrűsége (ϱ) ismeretében könnyen kiszámíthatunk:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho}} = 2{,}76 \text{ cm}.$$

Látható, hogy $x_{\max} \gg x_{\min}$, emiatt – első közelítésben – hanyagoljuk el a golyók méretét!

Ha a golyó egy $x_{\max}$ sugarú körpályán keringene a vonzócentrum körül, akkor a körmozgás dinamikai egyenlete:

$$f\frac{M}{x_{\max}^2} = x_{\max}\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

lenne, ahonnan a keringés ideje

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{16\,x_{\max}^3}{fm}}.$$

A kezdősebesség nélkül induló és emiatt a vonzócentrumba zuhanó test pályája elfajult ($e = 1$ excentricitású) ellipszisként is felfogható. Ennek a pályának a nagytengelye éppen fele az előbb vizsgált körpályáénak, az ellipszispályán tehát a teljes keringési idő (Kepler III. törvénye értelmében)

$$T_e = \frac{T_0}{\sqrt{8}} = \pi\sqrt{\frac{2\,x_{\max}^3}{fm}}$$

lenne. A vonzócentrumba zuhanás ideje a keringési időnek azonban csak a fele:

$$T \approx \frac{T_e}{2} = \pi\sqrt{\frac{x_{\max}^3}{2fm}} = 9{,}62\cdot 10^4 \text{ s} = 26^{\text{h}}\,43'.$$

A golyók véges mérete miatt az ütközésig eltelő idő a fenti értéknél egy kicsiny ΔT-vel kevesebb. Az energiamegmaradás tételéből kiszámíthatjuk, hogy a golyók sebessége közvetlenül az ütközésük előtt

$$v_{\max} = \sqrt{fm\left(\frac{1}{2x_{\min}} - \frac{1}{2x_{\max}}\right)} \approx \sqrt{\frac{fm}{2x_{\min}}} = 3{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ha a pontszerűnek tekintett testek a mozgás hátralevő részében mindvégig ezzel a sebességgel mozognának, a golyók sugarának megfelelő távolságot kb. 800 s alatt tennék meg. Mivel azonban a sebességük nem állandó, hanem egyre növekszik, $\Delta T < 800$ s. Ez a teljes mozgási időnek kevesebb, mint 1 százaléka, tehát (a többi adat pontosságát is figyelembe véve) nyugodtan elhanyagolható.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. ΔT integrálszámítással, vagy Kepler III. törvényének alkalmazásával pontosabban is kiszámítható és 540 s-nak adódik.

Gáspár Merse Előd (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)