Az abroncsra az *1. ábrán* látható erők hatnak. Mivel a lejtőre merőleges irányban nem gyorsul a test,

(1) $$N = mg\cos\alpha,$$

a súrlódási erő pedig (mindaddig, amíg csúszik az abroncs)

(2) $$S = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

A lejtő irányú mozgásegyenletből következik, hogy az abroncs tömegközéppontjának gyorsulása

(3) $$a = g(\sin\alpha - \mu g\cos\alpha).$$

A súrlódási együttható megadott helyfüggését is figyelembe véve és bevezetve az

(4) $$\omega_0 = \sqrt{\gamma g\cos\alpha} \qquad \text{és} \qquad x_0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\gamma}$$

jelöléseket a (3) mozgásegyenlet

(5) $$a = -\omega_0^2\,(x - x_0)$$

alakba is írható. Ez az egyenlet megegyezik egy ω_0 körfrekvenciájú, x_0 egyensúlyi helyzetű harmonikus rezgőmozgásával. Ezt az analógiát kihasználva felírhatjuk az abroncs tömegközéppontjának $x(t)$ elmozdulását is. Az $x(0) = 0$ és $v(0) = 0$ kezdeti feltételeket figyelembe véve a megoldás:

(6) $$x(t) = x_0\,(1 - \cos\omega_0 t)\,,$$

az abroncs tömegközéppontjának pillanatnyi sebessége pedig

(7) $$v(t) = x_0\omega_0\sin\omega_0 t.$$

A elmozdulás ismeretében kiszámíthatjuk a pillanatról pillanatra változó súrlódási együtthatót, abból a súrlódási erőt:

(8) $$S(t) = \mu mg\cos\alpha = x(t)\cdot\gamma mg\cos\alpha,$$

majd ennek forgatónyomatékából az abroncs β szöggyorsulását:

(9) $$\beta = \frac{rS}{mr^2} = \frac{\gamma x_0 g\cos\alpha}{r}\,(1 - \cos\omega_0 t)\,.$$

(Kihasználtuk, hogy egy m tömegű, r sugarú vékony abroncs tehetetlenségi nyomatéka mr^2.)

A (9) képlet azt mutatja, hogy a szöggyorsulás egy időben állandó és egy időben periodikusan ($\cos\omega_0 t$-vel arányosan) változó tag összege. Ennek megfelelően az abroncs szögsebessége (annak kezdeti nulla értékét is figyelembe véve)[1] Az abroncs pillanatról pillanatra változó $\omega(t)$ szögsebessége nem tévesztendő össze a tömegközéppont mozgásképletében szereplő ω_0 körfrekvenciával, ami egy állandó érték.:

(10) $$\omega(t) = \frac{\gamma x_0 g}{r}\cos\alpha\left(t - \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right).$$

Az abroncs addig csúszik, míg a tömegközéppont $v(t)$ sebessége nagyobb, mint a forgómozgásból származó $v_{\text{ker}}(t) = r\omega(t)$ kerületi sebesség. A tiszta gördülés kezdetére (7) és (10) szerint

(11) $$x_0\omega_0\sin\omega_0 t = \gamma x_0 g\cos\alpha\left(t - \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right)$$

jellemző, amit (4) felhasználásával és a az $\xi = \omega_0 t$ új változó bevezetésével

(12) $$\xi = 2\sin\xi$$

alakra hozhatunk. (12) megoldása grafikusan (*2. ábra*), vagy egy zsebszámológéppel numerikusan kereshető meg, és $\xi \approx 1{,}8955$-nek adódik.

Az abroncs tehát az indításától számított

(13) $$t \approx \frac{1{,}90}{\omega_0} = \frac{1{,}90}{\sqrt{\gamma g\cos\alpha}}$$

idő múlva kezd el csúszásmentesen gördülni.

[1] *

A mozgás további részében (egészen a lejtő aljáig) az abroncs sebessége és a szögsebessége ($\frac{1}{2} g \sin\alpha$ gyorsulással, illetve $\frac{g}{2r} \sin\alpha$ szöggyorsulással) időben egyenletesen növekszik.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.) és *Katona Gergely* (Budapest, ELTE Trefort Á. Gyakorlóisk., 12. o.t.) dolgozata alapján