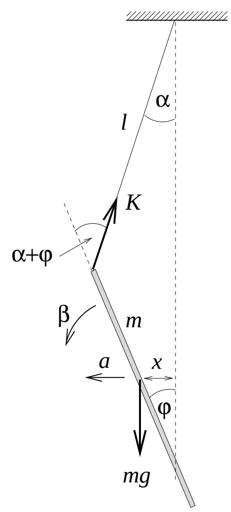
Jelöljük a rúd tömegközéppontjának pillantnyi kitérését x-szel, szögelfordulását pedig φ-vel! Ebből a két mennyiségből ki lehet számítani a fonál függőlegessel bezárt α szögét:

$$l \sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\varphi = x. \tag{1}$$

Ha a rudat csak kicsit lökjük meg, x, φ és α valamennyien kicsiny mennyiségek, négyzetük és magasabb hatványaik elhanyagolhatók, a szögek szinusza magukkal a szögekkel, koszinuszuk pedig 1-gyel közelíthető, (1) egyenlet pedig így írható:

$$x = l\left(\alpha - \frac{1}{2}\varphi\right). \tag{1'}$$



A fonalat feszítő erőt K-val jelölve a következő mozgásegyenletek írhatók fel:

$$mg - K = 0 \tag{2}$$

(mert a rúd függőleges irányú gyorsulása az alkalmazott közelítésben elhanyagolhatóan kicsi),

$$K\alpha = -ma \tag{3}$$

(ez a rúd vízszintes irányú mozgásegyenlete $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítésben), valamint a tömegközéppontra vonatkoztatott forgási egyenlet:

$$\frac{1}{12}ml^2 \cdot \beta = -\frac{l}{2}K(\alpha+\varphi). \tag{4}$$

(β a φ szög változására jellemző szöggyorsulást jelöli.)

Tételezzük fel, hogy mind $x(t)$, mind pedig $\alpha(t)$ az időnek szinuszos függvénye:

$$x(t) = x_0 \sin\omega t, \qquad \text{illetve} \qquad a(t) = -x_0\omega^2 \sin\omega t, \tag{5}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\omega t, \qquad \text{valamint} \qquad \beta(t) = -\varphi_0\omega^2 \sin\omega t, \tag{6}$$

ahol ω (a rezgés körfrekvenciája) valamekkora, később meghatározandó szám. Ha x és φ időben szinuszosan változik, akkor (1′) szerint ugyanilyen jellegű függvény kell legyen α is, ami annyit jelent, hogy a φ szög minden pillanatban az α szöggel arányos, annak k-szorosa:

$$\varphi(t) = k \cdot \alpha(t), \tag{7}$$

(k időtől független állandó). Az (1)–(7) egyenletekből k-ra egy másodfokú egyenletet kaphatunk:

$$3k^2 - 2k - 6 = 0,$$

amelynek gyökei:

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{19}}{3} \approx 1{,}79, \qquad \text{illetve} \qquad k_2 = \frac{1-\sqrt{19}}{3} \approx -1{,}12.$$

A rezgés körfrekvenciáját az

$$\omega^2 = \frac{6g}{l}\,\frac{k+1}{k} = \frac{g}{l}\left(5 \pm \sqrt{19}\right)$$

összefüggést írhatjuk fel, ahonnan k kiszámított értékeinek felhasználásával

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l}\left(5 \pm \sqrt{19}\right)},$$

tehát

$$\omega_1 = 3{,}06\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = 0{,}81\sqrt{\frac{g}{l}}$$

adódik[1]Ezeket a frekvenciákat a csatolt rezgő rendszer sajátfrekvenciáinak, a megfelelő k értékek által meghatározott amplitúdó-arányokat pedig normálmódusoknak nevezik. A nagyobb frekvenciájú normálmódusban $k > 0$, tehát a fonál és rúd az *ábrán* látható módon ellenkező irányban hajlik el a függőlegestől. A másik (alacsonyabb frekvenciájú normálmódusban a fonál és a rúd a függőlegeshez képest ugyanolyan irányban, de különböző mértékben hajlik. Mindkét módus tisztán periodikus mozgás, jól meghatározott frekvenciával jellemezhető..

A rendszer általános mozgása a kétféle normálrezgés szuperpoziciója:

$$\varphi(t) = \varphi_0^{(1)} \sin \omega_1 t + \varphi_0^{(2)} \sin \omega_2 t,$$

illetve

$$\alpha(t) = \frac{\varphi_0^{(1)}}{k_1} \cdot \sin \omega_1 t + \frac{\varphi_0^{(2)}}{k_2} \cdot \sin \omega_2 t.$$

A $\varphi_0^{(1)}$ és $\varphi_0^{(2)}$ amplitúdókat a rendszer kezdeti feltételeiből lehet meghatározni. A rúd felső végére kifejtett erőlökés hatására a rúd tömegközéppontja $F\Delta t/m$ sebességgel kezd el mozogni, az erőlökés forgatónyomatéka pedig $6F\Delta t/(ml)$ kezdeti szögsebességet hoz létre. Ez a két adat egyértelműen meghatározza a normálmódusok amplitúdóját:

$$\varphi_0^{(1,2)} = \pm 3 \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{19}}}{\sqrt{19}} \frac{F\Delta t}{m\sqrt{lg}},$$

és a szögelfordulások ismeretében megadhatjuk a rúd legalsó pontjának elmozdulását is:

$$x_P(t) = l(\alpha - \varphi) =$$
$$= \frac{F\Delta t}{m}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{19} - 7\right)\sqrt{5 + \sqrt{19}}}{2\sqrt{19}} \sin \omega_1 t + \frac{\left(\sqrt{19} + 7\right)\sqrt{5 - \sqrt{19}}}{2\sqrt{19}} \sin \omega_2 t \right)$$

[1] *