I. megoldás. A rendszerre nem hatnak vízszintes irányban külső erők, emiatt a tömegközéppont kezdeti $v_0/2$ vízszintes sebessége időben változatlan marad. Üljünk bele a tömegközépponttal együtt vízszintes irányban egyenletesen mozgó koordináta-rendszerbe. Jelöljük a kis test vízszintes elmozdulását x-szel, ekkor az abroncs középpontja ellenkező irányban ugyanennyivel kell elmozduljon, hiszen az egész rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban mozdulatlan.

A kis testre az (*1. ábrán*) látható erők hatnak. Ha v_0 kicsi, akkor a kis test csak kicsit mozdulhat ki vízszintes irányban, a függőleges elmozdulása (és ezzel együtt a függőleges irányú gyorsulása) tehát másodrendűen kicsiny, elhanyagolható. Emiatt a K kényszererő az mg nehézségi erővel egyezik meg, vízszintes komponense pedig

$$K_x = -K\sin\varphi \approx mg\frac{2x}{r}.$$

Newton második törvénye szerint

$$ma = -\frac{2mg}{r}x,$$

amelyben felismerhetjük az $\omega = \sqrt{2g/r}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgések mozgásegyenletét. A kis test kezdeti sebessége (a tömegközépponti rendszerben) $v_0/2$, a kitérés időbeli alakulását tehát az

$$x(t) = \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t$$

függvény írja le.

Visszatérve az eredeti (az asztallaphoz rögzített) koordináta-rendszerbe, az abroncs középpontjának elmozdulása

$$X(t) = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t,$$

a sebessége pedig

$$V(t) = \frac{v_0}{2}\left(1-\cos\omega t\right).$$

II. megoldás. Jelöljük az abroncs tömegközéppontjának t pillanatbeli elmozdulását $X(t)$-vel, pillanatnyi sebességét pedig $V(t)$-vel; a kis test és az abroncs középpontját összekötő egyenes függőlegessel bezárt szögét pedig φ-vel (*2. ábra*). Ez a két (pillanatról pillanatra változó) adat leírja a rendszer mozgását, feladatunk tehát ezen függvények meghatározása.

Jelöljük az egyes mennyiségek idő szerinti változási sebességét (egységnyi idő alatti változást) a kérdéses mennyiség betűjele fölé írt „ponttal". Ezzel a jelöléssel az abroncs pillanatnyi (vízszintes) sebessége $\dot X(t)$, a kis testnek a karikához viszonyított szögsebessége $\dot\varphi$, érintő irányú kerületi sebessége tehát $r\dot\varphi$.

Az abroncsra (súrlódásmentes körülmények között) nem hat forgatónyomaték, ezért nem jön forgásba. A rendszerre vízszintes irányban nem hat külső erő, emiatt a teljes vízszintes irányú impulzus időben állandó marad.

$$m\dot X + m(\dot X + r\dot\varphi\cos\varphi) = I = \text{állandó}. \tag{1}$$

Ugyancsak változatlan marad a rendszer teljes mechanikai energiája:

$$\frac12 m\dot X^2 + \frac12 m\left(\dot X^2 + r^2\dot\varphi^2 + 2\dot X r\dot\varphi\cos\varphi\right) + mgr(1-\cos\varphi) = E = \text{állandó}. \tag{2}$$

Kezdetben $\dot X(t=0) = 0$ és $\dot\varphi(t=0) = v_0/r$, innen a két mozgásállandó: $I = mv_0$, illetve $E = \frac12 mv_0^2$. Ezek felhasználásával írhatjuk

$$2\dot X + r\dot\varphi\cos\varphi = v_0, \tag{3}$$

valamint

$$2\dot X^2 + r^2\dot\varphi^2 + 2\dot X rbf\dot\varphi\cos\varphi + 2rg(1-\cos\varphi) = v_0^2. \tag{4}$$

Fejezzük ki (3)-ból $\dot X(t)$-t és helyettesítsük (4)-be:

$$\dot X = \frac{v_0 - r\dot\varphi\cos\varphi}{2}, \tag{5}$$

$$r^2\dot\varphi^2(2-\cos\varphi) + 4rg(1-\cos\varphi) = v_0^2. \tag{6}$$

Használjuk ki továbbá, hogy v_0 kicsiny ($v_0 \ll \sqrt{gr}$), így $1-\cos\varphi \ll 1$, tehát

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi^2}{2}.$$

Ebben a közelítésben (6) így alakul:

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{2g}{r}\varphi^2 = \left(\frac{v_0}{r}\right)^2. \tag{7}$$

Ez az összefüggés megegyezik egy $\omega = \sqrt{2g/r}$ körfrekvenciájú, $A = v_0/(\omega r)$ maximális (szög)kitérésű harmonikus rezgőmozgás képletével, hiszen a

$$\varphi(t) = A\sin\omega t, \qquad \dot{\varphi}(t) = A\omega\cos\omega t \tag{8}$$

függvények nyilván kielégítik (7) egyenletet, továbbá a $\varphi(0) = 0$ és $\dot{\varphi}(0) = v_0/r$ kezdeti feltételeket is.

Az $X(t)$ függvény (5) és (8) felhasználásával számítható ki.

$$\dot{X}(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 - \cos\omega t\right),$$

ahonnan az egyenletes mozgás és a harmonikus rezgőmozgás ismert út–sebesség képleteinek mintájára ($X(0) = 0$ kezdeti feltételt is figyelembe véve) a végeredmény:

$$X(t) = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t.$$

G. P.