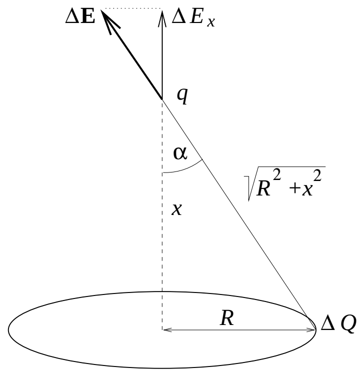
Helyezzünk el a szimmetriatengelyen a kör középpontjától x távolságban egy kicsiny q töltést. Erre a próbatöltésre a kör alakú vezeték valamely ΔQ nagyságú töltésdarabkája a Coulomb-törvénynek megfelelő

$$q \cdot |\Delta \mathbf{E}| = k \frac{q \Delta Q}{R^2 + x^2}$$

nagyságú erőt fejt ki (*1. ábra*).



1. ábra

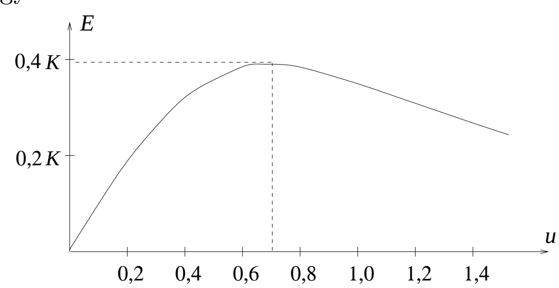
Ezen erők összege (szimmetria-okok) a szimmetriatengely irányába mutat, emiatt úgy is kiszámítható, hogy az az elemi erőhatások x tengely irányú vetületeit összegezzük:

$$qE = \sum qE_x = \sum q|\Delta \mathbf{E}| \cdot \cos\alpha = \sum kq\Delta Q \, \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = kq\frac{Q}{R^2} \frac{(x/R)}{(1+(x/R)^2)^{3/2}}.$$

Bevezetve az $u = x/R$ dimenziótlan változót, az elektromos térerősséget a szimmetriatengely mentén az

$$E(u) = k\frac{Q}{R^2} \frac{u}{(1+u^2)^{3/2}} = K \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{3/2}}$$

formulával adhatjuk meg. Ennek a kifejezésnek keressük a maximumát, vagyis azt az u értéket, ahol a K (állandó) szám mellett álló kifejezés a legnagyobb értékét veszi fel.



2. ábra

Ábrázolva az $u/(1+u^2)^{3/2}$ kifejezést u függvényében (*2. ábra*) megállapíthatjuk, hogy a maximumát $u \approx 0{,}7$-nél éri el. Az elektromos térerősség tehát a kör középpontjától $x \approx 0{,}7\,R$ távolságban a legerősebb. A maximum helye (pl. a függvény $u = 0{,}7$ körüli részének kinagyításával) természetesen pontosabban is meghatározható.

Madas Balázs (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. A szélsőérték helye differenciálszámítás segítségével is meghatározható. A térerősség az *1. ábrán* látható α szöggel is kifejezhető:

$$E = K \cdot \sin^2\alpha\cos\alpha = K \cdot (\cos\alpha - \cos^3\alpha) = K\,(y - y^3),$$

ahol $y = \cos\alpha$. Az $E(y)$ függvény lokális maximumánál az $E'(y) = K(1 - 3y^2)$ derivált nulla kell legyen, ez pedig $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, azaz $x = R/\sqrt{2} \approx 0{,}707\,R$ távolságnál teljesül.

Fábián Ákos (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn. 12. o.t.)