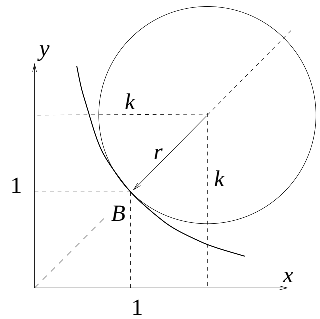
I. megoldás. A helyzeti energia megváltozásából ki tudjuk számítani a test B pontbeli sebességét:

$$v=\sqrt{2g\Delta h}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 1}\ \mathrm{m/s}=4{,}4\ \mathrm{m/s}.$$



1. ábra

A nyomóerőt a lejtőre merőleges irányú mozgásegyenletből számíthatjuk ki:

$$K=mg\sin 45^\circ+\frac{mv^2}{R},$$

ehhez azonban ismernünk kellene a pályagörbe R görbületi sugarát (a pályagörbét a kérdéses B pontban legjobban közelítő kör sugarát).

Mivel az $y=1/x$ egyenletű hiperbola szimmetrikus az $y=x$ egyenesre, ezért a simulókör középpontja rajta lesz ezen az egyenesen, koordinátáit tehát kereshetjük $(k,\,k)$ alakban. Az *1. ábráról* leolvasható, hogy a kör sugara $r=\sqrt{2}(k-1)$, az egyenlete tehát:

$$(x-k)^2+(y-k)^2=2(k-1)^2.$$

Ezen egyenlet által leírt körnek és az $y=1/x$ egyenletű hiperbolának a metszéspontjait az

$$(x-k)^2+\left(\frac{1}{x}-k\right)^2=2(k-1)^2$$

egyenlet gyökei adják meg, amely algebrai átalakítások után így is felírható:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2k\left(x+\frac{1}{x}\right)+4(k-1)=0.$$

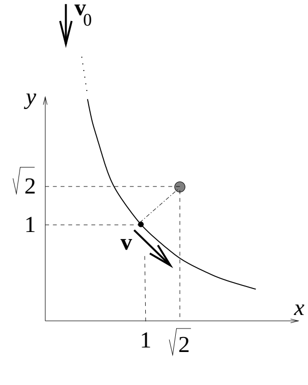
Ez az egyenlet az $u=x+x^{-1}$ új változóra nézve másodfokú, és az $x=y=1$ azaz $u=2$ nyilvánvaló megoldáson kívül akkor nincs több megoldása, ha a $D=4k^2+4(4k-1)$ diszkrimináns negatív vagy nulla: A simulókörnek éppen a $D=0$ határeset felel meg, ez pedig $k=2$-nél teljesül.

A simulókör sugara tehát $R=\sqrt{2}$ m, a kérdéses nyomóerő pedig

$$K=mg\sin 45^\circ+\frac{mv^2}{R}=mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)\approx 2{,}1\ \mathrm{N}.$$

Hegyi Péter (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.) és *Terpai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A pálya görbületi sugarát fizikai megfontolások segítségével is meghatározhatjuk. Ha egy pontszerű test valamilyen (ismert alakú) erő hatására éppen hiperbola pályán mozog, akkor Newton II. törvényét felhasználva kiszámíthatjuk a test centripetális gyorsulását, majd abból a pálya görbületi sugarát. (Ez a mennyiség nyilván csak a pályagörbétől függ, nem pedig attól, hogy milyen módon halad végig a kérdéses pályán a vizsgált test.)



2. ábra

Kepler I. törvénye szerint az égitestek a Nap gravitációs erőterében kúpszelet alakú pályákon mozognak, és ha a sebességük elegendően nagy, akkor a pályájuk hiperbola. Használjuk ki, hogy az $y=1/x$ egyenletű hiperbola egyik fókuszpontja a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ pontban van. Képzeljük el, hogy ebben a fókuszpontban van a Nap, és a pozitív y tengely irányából alkalmasan választott v_0 sebességgel közeledik hozzá egy m tömegű kicsiny test (*2. ábra*). A perdületmegmaradás tétele szerint a Naphoz legközelebbi B pontban v sebességgel haladó testre fennáll

$$mv_0\sqrt{2}=mv\,(2-\sqrt{2}),$$

az energiamegmaradás törvényéből pedig

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2-f\frac{mM}{2-\sqrt{2}}$$

következik. Ezekből az összefüggésekből

$$v^2=\sqrt{2}\frac{fM}{(2-\sqrt{2})^2}$$

adódik, melyet az

$$\frac{mv^2}{R}=\frac{fmM}{(2-\sqrt{2})^2}$$

mozgásegyenletbe helyettesítve a B pontbeli görbületi sugárra $R=\sqrt{2}$ m-t kapunk.
A számítás további menete megegyezik az I. megoldásban leírtakkal.

Tóth Bálint (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. A görbületi sugár differenciálszámítás segítségével is meghatározható:

$$\frac{1}{R}=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}=\frac{2\cdot x^{-3}}{\Big(1+[-x^{-2}]^2\Big)^{3/2}}=\frac{2}{2^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$