A rúdra ható függőleges erők egyensúlya és a forgatónyomatékok egyensúlya miatt a tömegközépponttól x, illetve y távolságra levő ujjakra

$$F_x = mg\,\frac{y}{x+y} \qquad \text{és} \qquad F_y = mg\,\frac{x}{x+y}$$

erő hat.

Tegyük fel, hogy a rúd először a bal oldali ujjunknál csúszik meg. Ekkor ott a bal oldalon ható súrlódási erő

$$S = \mu_{\rm cs}\cdot F_x = \mu_{\rm cs}\,mg\,\frac{y}{x+y}.$$

Ez az erő lassú (elhanyagolható vízszintes gyorsulású) mozgásnál megegyezik a jobb oldalon ható tapadó súrlódási erővel, amelynek legnagyobb értéke

$$\mu_{\rm t}\,F_y = \mu_{\rm t}\,mg\,\frac{x}{x+y}.$$

Ezek szerint a bal oldali ujjunk addig csúszhat, míg

$$\mu_{\rm cs}\cdot y \le \mu_{\rm t}\cdot x, \qquad \text{azaz} \qquad x \ge k\cdot y,$$

ahol $k = \mu_{\rm cs}/\mu_{\rm t} \le 1$.

Kezdetben $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}l$, a bal oldali ujjunk tehát – helyről helyre változó nagyságú súrlódási erő ellenében – az $x = x_1 = k\cdot l/2$ értéknek megfelelő helyzetig csúszik. Az eközben végzett munka integrálással számítható ki:

$$W(x_0\to x_1) = -\int_{x_0}^{x_1}\mu_{\rm cs}F_x\,dx = \mu_{\rm cs}mg\int_{l/2}^{kl/2}\frac{l/2}{x+(l/2)}\,dx = mg\,\mu_{\rm cs}\cdot\frac{l}{2}\,\ln\frac{2}{k+1}.$$

A második lépésben a jobb oldali ujjunk csúszik meg, miközben $x = x_1$ állandó, y pedig változik $l/2$-től $y_1 = kx_1 = k^2\cdot l/2$-ig. A végzett munka

$$W(y_0\to y_1) = -\int_{y_0}^{k^2y_0}\mu_{\rm cs}mg\frac{x_1}{x_1+y}\,dy = mg\,\mu_{\rm cs}\,\frac{l}{2}\cdot k\,\ln\frac{1}{k}.$$

Hasonló módon számíthatók a további (hol az egyik, hol pedig a másik oldalon megcsúszó rúdnak megfelelő) munkavégzések is. A folyamat során végzett összes munka

$$W = mg\,\mu_{\rm cs}\,\frac{l}{2}\,\left[\ln\frac{2}{1+k} + (k+k^2+k^3\ldots)\ln\frac{1}{k}\right] =$$

$$= mg\,\mu_{\rm cs}\,\frac{l}{2}\,\left[\ln\frac{2}{1+k} + \frac{k}{1-k}\ln\frac{1}{k}\right] = mg\,\mu_{\rm cs}\,\frac{l}{2}\,\left[\ln\frac{2\mu_{\rm t}}{\mu_{\rm cs}+\mu_{\rm t}} + \frac{\mu_{\rm cs}}{\mu_{\rm cs}-\mu_{\rm t}}\ln\frac{\mu_{\rm t}}{\mu_{\rm cs}}\right].$$

Amennyiben $\mu_{\rm cs} \ll \mu_{\rm t}$ (vagyis $k \ll 1$), a munkavégzés gyakorlatilag egyetlen lépésben történik és

$$W \approx mg\,\mu_{\rm cs}\,\frac{l}{2}\,\ln 2.$$

Ha viszont $\mu_{\rm t} \approx \mu_{\rm cs}$ (azaz $k \approx 1$), akkor (mint az pl. zsebszámológéppel numerikusan ellenőrizhető)

$$\frac{1}{1-k}\ln\frac{1}{k} \approx 1, \qquad \text{vagyis} \qquad W \approx mg\,\mu_{\rm cs}\,\frac{l}{2}.$$

Máthé András, (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján