

Tételezzük fel, hogy a gömb átlátszó (tehát a felületének bármely pontjából eljuthat a fény a lencséhez), de a belsejének törésmutatója nem különbözik a levegőtől, így a fénysugarak csak a lencsénél törnek meg. (A gyakorlatban ilyen helyzet például egy gömbfelület alakú, vékony, de nem nagyon sűrű szövésű dróthálóval valósítható meg.)

A gömbfelület forgásszimmetriája miatt elegendő a gömb egy síkmetszetének, az optikai tengelyre illeszkedő egyik főkörének képét meghatározni, a teljes kép ezen görbe megforgatásából adódó forgásfelület lesz.

Tekintsük a lencse egyik (F_1) fókuszpontja körüli r sugarú kör valamely R pontját, és szerkesztjük meg két nevezetes sugár segítségével az R -nek megfelelő P képpontot (1. ábra). Célserű a P pontot a másik (F_2) fókuszpontba helyezett derékszögű koordináta-rendszerbeli (x, y) számpárral jellemezni.

Az $OR'R$ és $OP'P$ háromszögek hasonlóságából

$$\frac{y}{x+f} = \frac{T}{t},$$

az $F_2P'P$ és F_2OQ háromszögek hasonlóságából pedig

$$\frac{y}{x} = \frac{T}{f}$$

következik. (A szokásos módon t az R pontnak megfelelő tárgytávolságot, T pedig a tárgy méretét jelöli.) Ezekből az arányokból T és t kifejezhető x és y segítségével:

$$T = f \frac{y}{x}, \quad \text{illetve} \quad t = f + \frac{f^2}{x}.$$

Használjuk ki, hogy R és F_1 távolsága r :

$$(t - f)^2 + T^2 = r^2,$$

ahonnan t és T behelyettesítése és algebrai átalakítások után

$$\left(\frac{rx}{f^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{f}\right)^2 = 1$$

adódik. Ez az összefüggés egy hiperbolát ír le, melynek az optikai tengellyel párhuzamos „valós féltengelye” f^2/r , „képzetes féltengelye” pedig f hosszúságú. (Ugyanez az összefüggés természetesen a „lencsetörvény” és a „nagyítási törvény” alkalmazásával is megkapható.)

A teljes gömbfelület képe a hiperbola mindkét ágának megforgatásából adódó ún. kétköpenyű forgáshiperboloid lesz (2. ábra). A gömb egyik ($t > f$ módon jellemezhető) felének képe *valódi* kép, az ábra jobb oldalán látható hiperboloid-köpeny. A másik (a lencséhez közelebb eső) félgömb képe *látászólagos* (virtuális) kép, ennek a bal oldali „köpeny” felel meg. A lencse fókuszsíkjában fekvő kör pontjairól nem jön létre kép, a hozzá közeli pontok képei pedig valamelyik hiperboloid-felületen nagyon messze (határesetben a „végtelenben”) alakulnak ki. (Ha a gömb nem átlátszó, akkor természetesen csak a lencséhez közelebbi felének virtuális képe jön létre.)

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a lencse vékony, és hogy a képképzés torzításmentes. Ez utóbbihoz az (is) szükséges, hogy a képképzésben részt vevő fénysugarak az optikai tengellyel majdnem párhuzamosan haladjanak, ez pedig akkor teljesül, ha a lencse fókusz távolsága a gömb sugaránál is és a lencse átmérőjénél is sokkal nagyobb. A megoldásban szereplő ábrák méretaránya tehát a erősen torzított, vagy ha ténylegesen ilyenek az arányok, akkor a kiszámított képfelületnek csak egy kis darabját szabad elfogadnunk.

Hasonló okok miatt nincs sok értelme a lencsébe nyúló, vagy azt magába foglaló gömb ($r \geq f$) esetét tanulmányoznunk. Matematikailag érdekes ugyan a paraméterek teljes tartományának vizsgálata, és az $r > f$ eset a „dróthálóba bujtatott” lencsével még fizikailag is megvalósítható, a leképezés torzításai miatt azonban ennek elemzése a ténylegesen tapasztalható képképzés szempontjából érdektelen.



