A jelenség arra vezethető vissza, hogy a napok deleléstől delelésig számított hossza az év során változik. Budapest a keleti szélesség 19. fokán van, az időzóna közepétől 4 fokkal keletre, ezért a Napnak (téli közép-európai idő szerint) 16 perccel dél előtt, 11 óra 44 perckor kellene delelnie. Az ettől való eltérést megadó összefüggést a csillagászok időegyenletnek nevezik. A delelés időpontjából levonva, illetve hozzáadva a nappal hosszának felét megkapjuk a napkelte, illetve a napnyugta időpontját, ezeket hasonlíthatjuk össze a zsebnaptárak adataival.

Először a nappal hosszát számítjuk ki. A napkelte és a napnyugta azzal jellemezhető, hogy a Nap sugarai merőlegesek a Föld középpontjából az adott földrajzi pontba mutató vektorra (*1. ábra*). Ha a Nap sugarai δ szöget zárnak be az Egyenlítő síkjával (vagyis a Nap az Ekliptikán a δ szélességi körön jár), akkor a sugarak irányvektora

$$\mathbf{e} = (0,\, -\cos\delta,\, -\sin\delta).$$

A θ földrajzi szélességi pont helyvektora

$$\mathbf{r} = R(-\cos\theta\sin t,\, \cos\theta\cos t,\, \sin\theta),$$

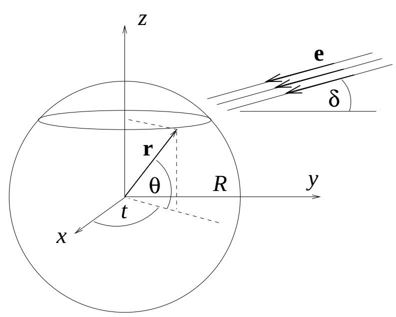
ahol $t = 360^\circ/24$ óra $\cdot$ az eltelt idő (valamely kezdeti időponthoz képest). A vektorok merőlegességéből adódik, hogy

$$\mathbf{er} = -R(\cos\theta\cos t\cos\delta + \sin\theta\sin\delta) = 0,$$

amiből

$$\cos t = -\operatorname{tg}\theta\,\operatorname{tg}\delta. \tag{1}$$

Az egyenlet t_1 és t_2 gyökeinek különbsége megadja az adott földrajzi szélességen és az adott napállásnál a nappal hosszát. Például az északi féltekén ($\theta > 0$) nyáron ($\delta > 0$) $t_1 - t_2 > 12\,\mathrm{h}$. Előfordulhat, hogy az (1) egyenletnek nincs megoldása, mert a jobb oldal értéke nagyobb 1-nél. Ez azt jelenti, hogy az adott földrajzi szélességen a Nap nem megy le, vagy nem kel föl.



A következő feladat az időegyenlet megmagyarázása. Az egyes lexikonokban megtalálható furcsa alakú függvény két hatás együttes eredményeként származtatható: 1. A Föld az ellipszis pályán nem állandó szögsebességgel kering a Nap körül. 2. A Föld tengelyferdesége miatt a Nap látszólagos pályája (az Ekliptika) $\gamma = 23^\circ 27'$ szöget zár be az Egyenlítővel, és a Nap az Ekliptikán mozog közelítőleg egyenletesen. Mindkét effektus kicsi, ezért hatásukat különkülön határozzuk meg, majd ezeket összegezzük.

1. A Föld $T_{\mathrm{cs}} = 23^{\mathrm{h}}\,56'\,4''$ alatt fordul meg a tengelye körül az állócsillagokhoz képest (csillagnap). Kepler II. törvénye (a perdületmegmaradás) szerint a keringés szögsebessége a Naptól való távolság négyzetével fordítottan arányos. Az átlagos szögsebesség $\Omega_{\text{átl}} = 2\pi/(365,241$ nap, ezért a Földnek átlagosan $\alpha_{\text{átl}} = 2\pi/365,241$ szöggel kell déltől délig (napi nap) többet fordulnia, mint egy teljes fordulat. Ezért egy napi nap átlagosan $\Delta T_{\text{átl}} = T_{\mathrm{cs}}\cdot\alpha_{\text{átl}}/(2\pi) =$ 236 s időtartammal hosszabb, mint egy csillagnap: $T_{\mathrm{n}} = T_{\mathrm{cs}} + 236$ s $= 24\,\mathrm{h}$.

A Nap–Föld távolság $R_{\min} = 147,1\cdot 10^6$ km és $R_{\max} = 152,1\cdot 10^6$ km között változik, átlagos értéke $R_{\text{átl}} = 149,6\cdot 10^6$ km. Kepler II. törvényét felhasználva azt kapjuk, hogy a csillagnaptól való legnagyobb, illetve legkisebb eltérés $\Delta T_{\max} = \Delta T_{\text{átl}}\cdot(R_{\text{átl}}/R_{\min})^2 \approx 228$ s, illetve $\Delta T_{\min} = \Delta T_{\text{átl}}\cdot(R_{\text{átl}}/R_{\max})^2 \approx 224$ s.

A Föld január 1-én, 2-án van legközelebb a Naphoz, ezért a napi nap ekkor a leghosszabb, $T_{\max} = 24^{\mathrm{h}}8''$, július 3-án van a legtávolabb, ekkor $T_{\min} = 23^{\mathrm{h}}\,59'\,52''$. A pályaegyenlet alapján levezethető, hogy a kis excentricitás miatt a napok hossza közelítőleg egy $A_{\Delta T} \approx 8$ s amplitúdójú koszinusz-függvény szerint változik:

$$T = 24\mathrm{h} + A_{\Delta T}\cdot\cos\frac{2\pi(d-1,5)}{365},$$

ahol d az év elejétől eltelt napok száma, az $1,5$-ös szám pedig a függvény január 1. és 2. közötti maximumából adódik. A kifejezés második tagja a delelés időpontjának egy napra jutó megváltozását adja meg, ezért a delelés időpontja (integrálással):

$$t_D = t_{D0} + \frac{365}{2\pi}\cdot A_{\Delta T}\cdot\sin\frac{2\pi(d-1,5)}{365} \approx 11^{\mathrm{h}}\,44' + 7,7'\cdot\sin\frac{2\pi(d-1,5)}{365}.$$

2. A Nap látszólagos mozgását az Ekliptikán közelítőleg egyenletesnek tekinthetjük (most elhanyagoljuk az ellipszispályából adódó kis hatásokat). Az Ekliptika az Egyenlítő síkjával $23°27'$ szöget zár be, a Napnak az Egyenlítő mentén mért Φ_{egy} koordinátája nem egyenletesen változik. A *2. ábra* alapján

$$\operatorname{tg}\Phi_{\text{ekl}} = \frac{NA}{NO}, \qquad \operatorname{tg}\Phi_{\text{egy}} = \frac{N'A}{N'O}$$
$$N'A = NA\cdot\cos\gamma.$$

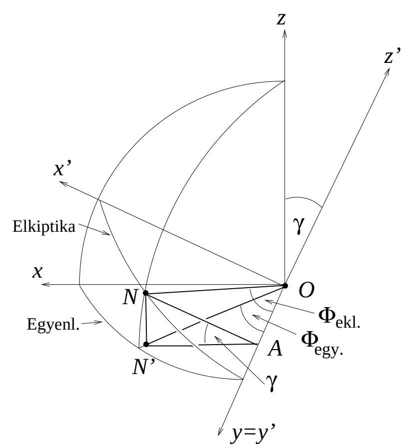
A fentiekből következik, hogy

$$\operatorname{tg}\Phi_{\text{egy}} = \cos\gamma\cdot\operatorname{tg}\Phi_{\text{ekl}}.$$

Az eltérésből $\tau = 24^{\text{h}}(\Phi_{\text{ekl}} - \Phi_{\text{egy}})/360°$ időeltolódás adódik. (A Földnek még ennyit kell fordulnia ahhoz, hogy ott deleljen a Nap, ahol delelne akkor, ha az Ekliptika egybeesne az Egyenlítővel.) Meg lehet mutatni, hogy a $\Phi_{\text{ekl}} - \Phi_{\text{egy}}$ különbség maximális értéke kb. $2,5°$. Kihasználva ennek kicsinységét, és azt, hogy $\cos\gamma$ közel van 1-hez, levezethető, hogy az így adódó időeltolódás jó közelítéssel

$$\tau = 9,8'\cdot\sin\frac{4\pi(d+9)}{365},$$

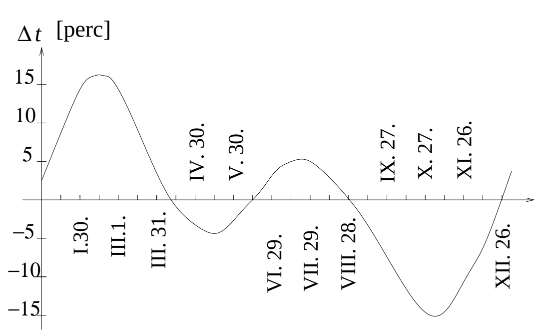
ahol d ismét az év elejétől eltelt napok száma, a $+9$ pedig abból adódik, hogy a függvény december 22-én, a téli napfordulókor (és a nyári napfordulónál, meg a napéjegyenlőségek idején) veszi fel a nulla értéket. (Ekkor ugyanis $\Phi_{\text{ekl}} = \Phi_{\text{egy}}$.)



A delelés időpontját tehát (közelítőleg) a

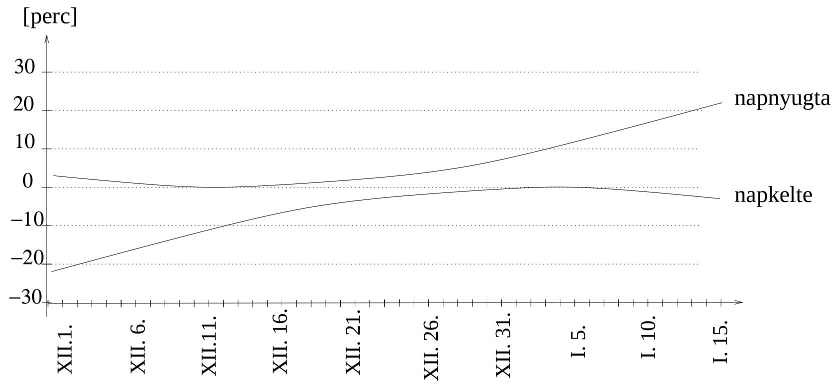
$$t_D = 11^{\text{h}}\,44' + 7,7'\cdot\sin\frac{2\pi(d-1,5)}{365} + 9,8'\cdot\sin\frac{4\pi(d+9)}{365} = 11^{\text{h}}44' + \Delta t \tag{2}$$

függvény adja meg. A napkeltének és a napnyugtának a *deleléshez viszonyítva* egyszerre van szélsőértéke, nevezetesen december 22-én és június 22-én. A napkelte és a napnyugta *valódi ideje* viszont az időegyenlet miatt már nem ugyanakkor veszi fel szélsőértékét. Az időegyenletet a *3. ábra*, a napkelte és napnyugta téli szélsőértékeit a *4. ábra* mutatja.



Megjegyezzük még, hogy a nappal hosszát a fentieken kívül a légkör optikai hatása is befolyásolja (például március 21-én, a „napéjegyenlőségkor” a nappal kb. $12^{\text{h}}\,10'$ hosszú).

G. L. és *V. P.*


[perc]
30
20
10
0
−10
−20
−30
XII.1.
XII. 6.
XII.11.
XII. 16.
XII. 21.
XII. 26.
XII. 31.
I. 5.
I. 10.
I. 15.
napnyugta
napkelte